

Interrogation écrite 2 : 25 novembre 2011
Durée : 45 minutes. Aucun document n'est autorisé.

Nom:

Exercice 1

Soit $E = \{x, y, z, w\}$ et $\mathcal{A} = \{\{y, z\}, \{x\}\}$. Décrire la sigma-algèbre (tribu) engendrée par $\mathcal{A}$.

Exercice 2

Soient T_1 et T_2 deux sigma-algèbres sur un ensemble E engendrées respectivement par deux sous-ensembles S_1 et S_2 de $\mathcal{P}(E)$.

A) Montrer que $T_1 \cap T_2$ est une sigma-algèbre mais qu'elle n'est pas engendrée par $S_1 \cap S_2$.
(Indication: considérer $S_1 = A$ et $S_2 = A^c$, pour $A \in \mathcal{P}(E)$.)

B) $T_1 \cup T_2$ est-elle une sigma-algèbre?
(Indication: considérer $S_1 = A$ et $S_2 = B$, pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B \neq E$ et $A \cap B \neq \emptyset$.)

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on pose: $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

(Mesure ou masse de Dirac au point x .)

a) Vérifier que $\delta_x(A)$ est une mesure. (Indication: $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$)

b) Quels sont les ensembles $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tel que $\delta_x(A) = 0$?

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on pose:

$$\begin{aligned}\mu_d(A) : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\mapsto [0, +\infty) \\ A &\mapsto \mu_d(A) = \text{Card}(A)\end{aligned}$$

(Mesure de comptage ou mesure de denombrement.)

- a) Vérifier que $\mu_d(A)$ est une mesure.
- b) Quels sont les ensembles $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que $\mu_d(A) = 0$?