

Interrogation écrite 1 : 14 octobre 2011
Durée : 45 minutes. Aucun document n'est autorisé.

Nom:

Exercice 1

- 1) Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles. Énoncer une condition suffisante pour qu'elle soit intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.
- 2) Dire si les fonctions suivantes sont intégrables au sens de Riemann sur les intervalles indiqués en justifiant la réponse. Dans le cas de réponse affirmative, calculer l'intégrale sur l'intervalle correspondant.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x \in [4, 5]; \quad g(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x), x \in [0, 1]; \quad h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Exercice 2

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

- a) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
- b) Calculer $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (Aide: dessiner les graphes des fonctions f_n).
- c) Peut-on conclure, sans calculer, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 f(x) dx?$$
