Feuille 5 : Intégrale de Fourier

Définition 1. *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier l'application noté $\widehat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$) définie pour tout $k \in \mathbb{R}$ par :*

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\, k}\, f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Théorème 2. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est injective de $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}))$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$.*

Théorème 3. *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Si $\widehat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\, k}\, \widehat{f}(k) dk$ λ-presque partout. Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, l'égalité est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Corollaire 4. *Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right) = f(-x)\,.$$

Théorème 5. *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et à support compact. Alors $\widehat{f}$ est indéfiniment dérivable et pour toutes dérivation*

$$\frac{d^\alpha}{dk^\alpha}\mathcal{F}(f)(k) = (-2i\pi)^\alpha \mathcal{F}\left(x^\alpha f(x)\right)(k).$$

Théorème 6. *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Si f est continue, de classe $C^1(\mathbb{R})$ par morceaux et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{F}\left(f'\right)(k) = (2i\pi k)\mathcal{F}\left(f\right)(k).$$

Si de plus f est de classe C^m par morceaux et telle que les dérivés f^α jusqu'á l'ordre m inclus appartiennent á $L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq \alpha \leq m$ on a

$$\mathcal{F}\left(f^{(\alpha)}\right)(k) = (2i\pi k)^\alpha \mathcal{F}\left(f\right)(k).$$

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\,\widehat{g}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{R}\,.$$

(2) En déduire qu'il n'existe pas de $h \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $h * f = f * h = f$.

(3) Resoudre dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ l'équation $\quad f * f = f$.

Exercice 2

On appelle H la fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \quad \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Calculer les transformées de Fourier des applications suivantes pour $a > 0$:

$$f_1(x) = e^{-ax} H(x) \qquad\qquad f_2(x) = e^{ax} H(-x) \qquad\qquad f_3(x) = e^{-a|x|}$$

Exercice 3
Soit g la fonction définie pour $a > 0$ par
$$g(x) \;=\; e^{-ax^2}\,.$$

(1) Vérifier que g est solution de l'équation differentielle
$$g' + 2axg = 0.$$

(2) Montrer que $\widehat{g}$ est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera et en déduire $\widehat{g}$.
(On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.)

Exercice 4
Soient $c, d > 0$. On pose
$$g_c(x) = \frac{1}{\sqrt{c}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2c}}\,.$$
Calculer $g_c * g_d$ à l'aide de la transformée de Fourier.

Exercice 5
Soit f une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est aussi dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

(1) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par
$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2i\pi kx}\widehat{f}(k)dk$$
est solution sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et que $u(0,x) = f(x)$ λ-p.p..

(2) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$u(t,x) = (g * f)(x) \text{ où } g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Indication. Pour la question (2) on pourra utiliser l'exercice 4.