

Feuille 4 : Espaces $\mathbb{L}^p$ et changement de variable

Exercice 1

- (1) Soit $p \geq 1$. Pour quelles valeurs de α , la fonction $f(x) = x^{-\frac{1}{\alpha}}$ est-elle dans $L^p(]0, 1[)$?
- (2) Soit $p \geq 1$. Pour quelles valeurs de α , la fonction $f(x) = x^{-\frac{1}{\alpha}}$ est-elle dans $L^p(]1, +\infty[)$?
- (3) Soit $p \geq 1$ et soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = [x(1 + (\ln x)^2)]^{-\frac{1}{p}}.$$

Pour quelles valeurs de $q \geq 1$ la fonction g est-elle dans $L^q(]0, +\infty[)$?

- (4) On suppose $1 \leq p < q < +\infty$. Donner un exemple de fonction de $L^p(]0, +\infty[)$ qui n'est pas dans $L^q(]0, +\infty[)$ et un exemple de fonction de $L^q(]0, +\infty[)$ qui n'est pas dans $L^p(]0, +\infty[)$.
- (5) On désigne par $l^p(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $a = (a_n)_{n \geq 0}$ telles que $\sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty$.

Montrer que pour $1 \leq p < q \leq +\infty$ on a :

$$l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N}).$$

Donner un exemple de suite a dans $l^2(\mathbb{N})$ qui n'est pas dans $l^1(\mathbb{N})$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (1)$$

et soient $p, q \in [1, +\infty[$ avec $p < q$.

1. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f \in L^q(\mathbb{R})$.
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant (1) et telle que $f \in L^q(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 3

- (1) Soient $1 \leq p < q < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors $\forall r \in]p, q[$ on a $f \in L^r(\mathbb{R})$, et on a l'inégalité d'interpolation:

$$r = \alpha p + (1 - \alpha)q \implies \|f\|_r \leq \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{r}} \|f\|_q^{\frac{(1-\alpha)q}{r}}.$$

- (2) En déduire que $I_f = \{r \geq 1 \mid f \in L^r\}$ est un intervalle.
- (3) Déterminer I_f pour la fonction $f(t) = t^{-1/2}$ définie sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ .
- (4) Soient $p, q, r \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, i.e. $r = \frac{pq}{p+q}$. Démontrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ alors fg est dans $L^r(\mathbb{R})$ et on a : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 4

Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \in [1, +\infty]$.

(1) Montrer que $f * g(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $f * g$ est uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$.

(2) Soient maintenant p et q tels que $1 < p, q < +\infty$. Montrer que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0$.

Exercice 5

Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$. Calculer

$$\int_S e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy.$$

Exercice 6

Calculer le volume de la partie B de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Exercice 7

Soit T un tore plein obtenue par rotation d'un disque de centre (R, O, O) et de rayon r autour de l'axe (Oz) dans le plan (Oxz) . Calculer le volume de T .

Exercice 8

Dans cet exercice, $n = 2$ ou 3 . Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, et $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\}$. En posant $f(x) = |x|^p$, à quelle condition sur le réel p a-t-on $f \in L^1(B_n)$? A quelle condition $f \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_n)$?

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_D \frac{1}{x^2 y} dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$;

(2) $\int_{D_a} e^{2x+y} dx dy$, où $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a \text{ et } x + y \leq a\}$;

(3) $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)} dx dy$.