

Feuille 3 - Convolution

@@@@@@@@@@@@@@@@ @@@@ **RAPPEL** @@@@@@@@@@@@@@@@@@

Définition 1. Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Le produit de convolution est la fonction suivante:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

On a : **(Commutativité)** $f * g = g * f$, et

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Si f est α fois dérivable alors $D^k(f * g) = D^k(f) * g$ pour tout $k \leq \alpha$.

@@

Exercice 1

(Propriétés des convolution) Soient f, g et h dans $L^1(\mathbb{R})$.

Montrer les suivants propriétés des produits de convolution.

- (1) **(Associativité)** $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- (2) **(Distributivité)** $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- (3) **(Invariance par translation)** Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$. On a $((\tau_h f) * g) = \tau_h(f * g)$.
- (4) $(f * g)$ est paire si f et g sont tous les deux paires ou toutes les deux impaires, et impaire si l'une est paire et l'autre est impaire.
- (5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \right)$$

Exercice 2

(1) Calculer les produits de convolution suivants

$$(\mathbb{I}_{[-a,a]} * \sin)(x) \quad \text{et} \quad (\mathbb{I}_{[-a,a]} * \cos)(x), a > 0.$$

Soient f et g les fonctions obtenues. Vérifier que f est impaire, que g est paire et qu'elles sont toutes les deux indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Expliciter leurs dérivées f' et g' .

(2) Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $g = \mathbb{I}_{[-b,b]}$, $b > 0$. Montrer que $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ et exprimer $(f * g)'$ en fonction de f .

(3) On suppose que $f := \mathbb{I}_{[-1,1]}$; calculer $f * f$. Quelle est la régularité de $f * f * f$ (on ne demande pas de faire les calculs).

Exercice 3

(Equation de la chaleur).

Soit $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose:

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

(I) Montrer que $\forall t > 0, \Phi(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ en calculant son intégral sur $\mathbb{R}$.

(II) Soit u_0 une fonction C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $u(x, t) := (\Phi(y, t) * u_0(y))(x)$ est une fonction C^∞ dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et que:

(1) $u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$ dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

(2) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0)} u(x, t) = u_0(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

(III) Montrer que:

(3) $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$

et que si de plus u_0 est une fonction non nulle à valeurs positives ou nulles alors $u(x, t)$ est positive en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et temps $t > 0$.