

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

1. Montrer que f est une fonction mesurable sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.
2. Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$. Où est le problème?

Exercice 5

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et soit $T > 0$. Montrer que

$$\int_0^T \int_{s=0}^t f(s, t) ds dt = \int_0^T \int_{t=s}^T f(s, t) dt ds .$$

Calculer, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_0^T \int_0^t f(s) ds dt .$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{-xy} \sin x .$$

- (1) Montrer que pour tout $A > 0$, f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, A] \times [0, +\infty[$.

- (2) En déduire que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(Indication : on pourra écrire $e^{-xy} \sin x = \text{Im}(e^{-x(y-i)})$ et utiliser le théorème de convergence dominée).