

Exercices

Exercice 1

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit f une fonction mesurable positive telle que $0 < \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) < +\infty$. On fixe un réel strictement positif α .

Déterminer suivant les valeurs de α

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} n \ln \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^{\alpha} \right) d\mu(x).$$

Indications : On pourra utiliser le fait que si $t \geq 0$ et $\alpha \geq 1$, $1 + t^{\alpha} \leq e^{\alpha t}$.

Exercice 2

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables positives. Montrer que:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f_n d\mu \right)$$

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$, où μ_d est la mesure de dénombrement ou de mesure comptage. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ une suite positive, expliciter $\int_{\mathbb{N}} f d\mu_d$.

En déduire que pour toutes suites doubles $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ des réels positifs on a:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n} \right)$$

Exercice 3

Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives, telle que $\int_{\Omega} f_0 d\mu < +\infty$.

1. Démontrer que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f , alors f est mesurable positive et $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu < +\infty$.
2. Démontrer que l'hypothèse $\int_{\Omega} f_0 d\mu < +\infty$ est nécessaire.
3. Que devient cette assertion lorsque $f_n = \mathbb{I}_{A_n}$, où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de Σ ?

Indications : 1. Considérer la suite $(f_0 - f_n)_{n \geq 1}$ et utiliser le théorème de convergence monotone.

2. Prendre, par exemple, $(E, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f_n = \mathbb{I}_{[n, +\infty[}$.

3. Démontrer qu'on a alors l'égalité suivante : $\mu(\cap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ (propriété de la continuité décroissante de la mesure).