

EXPOSES 2005

01. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.
02. Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.
03. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.
04. Description mathématique d'une expérience aléatoire: ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
05. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.
06. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.
07. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.
08. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
09. Division euclidienne dans \mathbb{Z} , unicité du quotient et du reste. Applications.
10. Congruences dans \mathbb{Z} . Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
11. PGCD et PPCM de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
12. Nombres premiers; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
13. L'anneau \mathbb{Z} ; sous-groupes additifs de \mathbb{Z} . Les idéaux de \mathbb{Z} sont principaux. Egalité de Bézout. Résolution dans \mathbb{Z} d'une équation de la forme $ax + by = c$.
14. Nombres décimaux. Applications.
15. Construction du corps \mathbb{Q} des rationnels.
16. Introduction et construction du corps \mathbb{C} des complexes. Propriétés.
17. Racines n -ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.
18. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.
19. Représentation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \bar{z}$, où a et b appartiennent à \mathbb{C} , a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.
20. Étude de la fonction $f : z \mapsto \frac{z - a}{z - b}$, où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f . Applications.
21. Fonction polynôme du second degré à coefficients réels. Mise sous forme canonique; application à l'étude du sens de variation et à la représentation graphique de la fonction. Équations et inéquations du second degré. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

22. Résolution des systèmes linéaires par opérations élémentaires sur les lignes. Méthode du pivot. Exemples.
23. Caractérisation vectorielle d'une droite du plan. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme. Orthogonalité.
24. Théorème de Thalès. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections.
25. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.
26. Équation cartésienne d'une droite du plan euclidien. Application à l'étude d'inéquations de la forme $a \cos t + b \sin t \geq c$.
27. Homothéties et translations; transformation vectorielle associée. Invariants élémentaires: effet sur les directions, l'alignement, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
28. Réflexion du plan échangeant deux points donnés; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).
29. Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).
30. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).
31. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).
32. Rotations planes. Notion d'angle.
33. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).
34. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.
35. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.
36. Théorème de l'angle inscrit : ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de droites ou de demi-droites (MA, MB) soit constant. Cocyclicité. Applications.
37. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.
38. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.
39. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.
40. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...
41. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Associativité; application à la détermination de barycentres attachés à des configurations usuelles du plan, de l'espace.
42. Composées d'homothéties et de translations du plan. Groupe des homothéties-translations. Applications.
43. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.
44. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.
45. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).
46. Droites et plans dans l'espace. Positions relatives; plans contenant une droite donnée.

47. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.
48. Ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale dans le plan. Applications (en particulier, projection orthogonale d'un cercle sur un plan).
49. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.
50. Réflexions et rotations de l'espace. Invariants élémentaires: effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
51. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente; interprétation cinématique.
52. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.
53. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions.
54. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions.
55. Exemples de représentation paramétrique des coniques; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.
56. Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
57. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.
58. Rapidité de la convergence d'une suite réelle (u_n) vers une limite ℓ . Cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par n^{-a} , par k^n . . . Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
59. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie: comparaison, opérations algébriques, composition par une application.
60. Étude des suites de terme général a^n , n^b et $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
61. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
62. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de \mathbb{R} . Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.
63. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
64. Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.
65. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de \mathbb{R} . Propriétés. Exemples.
66. Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
67. Fonctions polynômes.
68. Fonctions logarithmes.
69. Fonctions exponentielles.
70. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé

pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

71. Dérivée en un point. Interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

72. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

73. Formules de Taylor. Applications.

74. Développements limités, opérations sur les développements limités.

75. Applications du calcul différentiel à la recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

76. Comparaison des fonctions: domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.

77. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

78. Théorème de Rolle. Applications.

79. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

80. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle : $f(x + y) = f(x) \times f(y)$. Applications.

81. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.

82. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.

83. Intégration par parties. Exemples de changements de variable. Applications.

84. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

85. Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.