Enoncé : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui admet une dérivée à droite (notée $f'_d(x)$) en tout point x de $[a,b[$. Si $f'_d(x) \leq M$ pour une certaine constante $M \in \mathbb{R}$ alors :

$$f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Remarque : Il existe plusieurs variantes : si $f'_d(x) \geqslant -M$, on change f en $-f$ et on obtient l'inégalité opposée. Si $|f'_d(x)| \leq M$, on applique deux fois le résultat puisque $-M \leq f'_d(x) \leq M$.

Preuve : Il s'agit de prouver que $f(b) - f(a) \leqslant (M+\delta)(b-a)$ pour tout $\delta > 0$ car si cette propriété est vraie, il suffit de faire tendre δ vers 0.

Pour $\delta > 0$ fixé, on introduit :

$$A = \{x \in [a,b] \setminus f(x) - f(a) \leq (M+\delta)(x-a)\}.$$

Cet ensemble est fermé car f est continue et donc la borne supérieure de A, m, appartient à A. Donc :

$$f(m) - f(a) \leq (M+\delta)(m-a) \quad \text{et si } m < b$$

D'autre part, f est dérivable à droite en m : par définition de la limite, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $m < x \leqslant m + \alpha$ alors :

$$\frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leqslant f'_d(x) + \delta \leqslant M + \delta$$

Ce qui donne $f(x) - f(m) \leq (M+\delta)(x-m)$.

En ajoutant les inégalités sur $f(m)-f(a)$ et $f(x)-f(m)$, on récupère :

$$f(x)-f(a) \leq (M+\delta)(x-a) \quad \text{pour tout } x \in [m, m+\alpha].$$

Ceci contredit la définition de m puisque tout x de l'intervalle $[m, m+\alpha]$ est dans A. On a donc forcément $m=b$ et la preuve est terminée.

<u>Remarque</u> : On peut aussi définir A comme l'ensemble des $x \in [a,b]$ tel que :

$$f(y)-f(a) \leq (M+\delta)(y-a) \quad \text{pour tout } y \in [a,x]$$

ce qui peut être un peu plus naturel car dans la preuve ci-dessus, rien n'empêche le cas (étrange) où $A = \{a, m\}$.