Suites et séries de fonctions

① Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

(i) On suppose que $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe pour tout n et que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ aussi. A-t-on

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \ ?$$

(ii) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Est-il vrai que

$$g(f_n) \longrightarrow g(f) \text{ uniformément ?}$$

(iii) On suppose que les f_n et f sont de classe C^1. A-t-on $f_n' \longrightarrow f'$ simplement ?

(iv) On suppose que f_n est de classe C^1 pour tout n et que $|f_n'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [0,+\infty[$. Montrer que la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,A]$ implique sa convergence uniforme sur $[0,A]$, pour tout $A > 0$.

② Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge localement uniformément vers une fonction f. On suppose qu'il existe $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ pour tout } x \geq 0.$$

Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe (de même que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$) et $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

(NB : Méthode imposée = Intégrale de Riemann).

(3) Soit f une fonction continue sur $[0,\pi/2]$. Etudier la limite éventuelle de
$$I_n = n\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^n(x) f(x)\,dx.$$

(4) Série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$. Que peut-on dire de la somme ? continuité ? dérivabilité ?

(5) Toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.

(6) Montrer que la suite de fonctions polynomiales définie par
$$P_0(x) = x$$
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \left(x - P_n^2(x)\right)/2$$
converge vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

(7) Etudier la suite de fonction $x \longmapsto \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$

(8) Etudier la série de fonctions de terme général
$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^4x^2} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES
ANNÉE 2011-2012

Suites de fonctions

1. A SAVOIR

- Convergences simple, uniforme
- Critère de Cauchy, critère de Cauchy uniforme
- Convergence en probabilité, presque sure, en loi, dans L^p
- Convergence uniforme des fonctions en escalier vers les fonctions Riemann-intégrables
- Continuité de la limite, dérivabilité, double limite, intégration
- Théorèmes de convergence monotone et dominée
- Théorème de Weierstrass (cf U.E. 5)

2. POUR APPROFONDIR

- Théorème de Dini (cf U.E. 3)

3. EN LIEN AVEC..

- la feuille sur l'interversion limite-intégrales

4. EXERCICES

Exercice 1 : Convergences simple et uniforme, exemples [P, M]
Etudier la convergence simple, puis la convergence uniforme des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

1.1. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}$.

1.2. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,1]$.

1.3. $f_n(x) = \dfrac{nxe^{-nx}}{1-e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Convergences simple et uniforme, contre - exemples [H, P]
2.1. Trouver une fonction g continue et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément telles que $(gof_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

2.2. Trouver une suite de fonctions dérivables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f telle que f ne soit pas dérivable.

2.3. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$ et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 3 : Limite et continuité [P]
3.1. Soit X un espace topologique et E un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E convergeant uniformément vers la fonction f. Si chacune des fonctions f_n est continue au point a de X, montrer que la fonction f est continue au point a.

3.2. Soit X un espace topologique, A une partie de X, $a \in \bar{A}$ et E un espace métrique complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans E convergeant uniformément vers la fonction f sur A. Si chacune des fonctions f_n possède une limite b_n au point a, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b et que la fonction f possède comme limite b au point a.

Exercice 4 : Fonctions lipschitziennes / convexes et convergence uniforme [P, G]
4.1.a. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions lipschitziennes de $[a,b]\subset\mathbb{R}$ dans un $\mathbb{R}$-evn E, convergeant simplement vers une fonction f telle que la suite des rapports de Lipschitz est uniformément bornée. Montrer que la convergence est uniforme.

b. Que se passe-t-il si les rapports de Lipschitz ne sont pas bornés ?

4.2.a. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur le segment $[a,b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a,b[$.

b. Y a-t-il convergence uniforme sur $[a,b]$?

Exercice 5 : Polynômes et convergence uniforme [P, G] Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 6 : Vers l'exponentielle [G]

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $f_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $f : z \to e^z$.

Exercice - Examen 7 : Théorème de Chudnovsky [FGN2 ; p. 129]

Soit I un segment inclus dans $]0,1[$ et φ l'application définie par $\varphi(x) = 2x(1-x)$. On définit la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\varphi_n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$.

7.1. Etudier la convergence sur I de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ convergeant uniformément vers f sur I.

Exercice - Examen 8 : Critère de convergence uniforme [FGN2 ; p. 167]

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions telle que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ convergente, la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8.1. Prouver la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8.1. Prouver la continuité de f.

8.2. En déduire que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme.

Exercice - Examen 9 : Théorème de sélection de de Helly [FGN2 ; p. 165]

9.1. On suppose $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable. Soit $f_n : E \to \mathbb{R}$ telle que $|f_n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction f.

9.2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

9.3. Soit $f_n : \mathbb{R} \to [-1,1]$ des fonctions croissantes. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

5. Indications

Exercice 3 :

3.1. Découpage avec des ε.

3.2. Utiliser le critère de Cauchy uniforme et la question précédente.

Exercice 4 :

4.1.a. Le caractère lipschitzien permet de se ramener à un nombre fini de points.

4.2.a. La convexité de f_n et la convergence simple permettent de montrer que les f_n sont K-lipschitziennes (penser aux taux d'accroissement).

Exercice 5 :

Penser au critère de Cauchy uniforme : le polynôme $P_n - P_N$, borné sur $\mathbb{R}$, est une constante.

Exercice 6 :

Majorer et utiliser que $C_n^k \frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!}$.

Exercice 7 :

7.2. Montrer que $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Z}[X]}$ à l'aide de la première question et de la densité des dyadiques dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

8.1. Pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x, considérer la suite définie par $y_{2n} = x_{2n}$ et $y_{2n+1} = x$.

8.2. Par l'absurde, construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a et une sous-suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(a)| \geqslant \varepsilon/2$.

8.3. Par l'absurde, construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ telle que $|f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon/2$ et en extraire une sous-suite convergente.

Exercice 9 :

9.1. Utiliser le procédé diagonal de Cantor.

9.2. Construire l'application $x \to q_x$, où $q_x \in \mathbb{Q}$ est tel que $\lim_{x^-} f < q_x < \lim_{x^+} f$.

9.3. Utiliser la question 9.1. avec $E = \mathbb{Q}$, puis avec l'ensemble des points de discontinuité de f.

6. Références

[FGN2] Francinou, Gianella, Nicolas, *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 2*, Cassini.

[G] Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.

[H] Hauchecorne *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses.

[M] Merlin , *Methodix Analyse*, Ellipses.

[P] Pommellet, *Cours d'analyse, agrégation de mathématiques*, Ellipses.