

Exercices

(1) Montrer que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\hat{f}\left(\frac{x}{\xi}\right) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \frac{x}{\xi}} dx$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (sans utiliser Riemann-Lebesgue)

(2) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

(3) Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

On suppose que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(0,1)$ ^{et $f(0)=0$} . Prouver

qu'alors $|f(z)| \leq M|z|$ et que, s'il existe $z_0 \in D(0,1)$ tel que

$|f(z_0)| = M|z_0|$ alors $f(z) = dz$.

Donner un résultat analogue lorsque 0 est un zéro d'ordre k de f .

(4) Calculer $\int_0^1 t^{-t} dt$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale

(5) Donner un équivalent, lorsque $x \rightarrow +\infty$, de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x^2} \frac{x^n}{n!}$$