Faculté des Sciences et Techniques - TOURS Année 2007-2008
Licence de Mathématiques – Module O_5
Analyse numérique des équations différentielles.

EXAMEN – 2ème session
(Durée 3h)

Exercice 1
1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $I\!R$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathcal{P}_5(I\!R)$ tel que :

$$P(-1) = f(-1),\ P'(-1) = f'(-1),\ P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P(1) = f(1),\ P'(1) = f'(1).$$

(On ne demande pas forcément de donner le polynôme P explicitement.)
2) Démontrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\xi_x \in]-1, 1[$ tel que l'on ait une formule d'erreur du type :

$$f(x) - P(x) = A_x Q(\xi_x).$$

où Q est un polynôme unitaire de degré 6 que l'on précisera et A_x est une constante qui dépend de x et de f, et dont on donnera une expression précise en fonction de f et de ses dérivées.
3) Déterminer les cœfficients de la formule d'intégration :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \lambda_1 f(-1) + \lambda_2 f'(-1) + \lambda_3 f(0) + \lambda_4 f'(0) + \lambda_5 f(1) + \lambda_6 f'(1)$$

pour qu'elle soit exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_5(I\!R)$.
4) On utilise cette formule de quadrature dans une méthode composée pour le calcul approché de $\int_a^b f(t)dt$ utilisant les points $x_i = a + i\dfrac{b-a}{N}$ et on note $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{N}$.
Écrire la formule donnant la valeur approchée de l'intégrale.
5) Pour $f \in C^\infty(I\!R)$, l'erreur commise est d'ordre h^K. Déterminer la valeur de K.

Exercice 2
Sur l'espace $C([-\pi/2, \pi/2])$, on considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par : pour tous $f, g \in C([-1, 1])$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\ .$$

Calculer la projection orthogonale de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur l'espace $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Exercice 3
On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y(0) = \bar{y} \ ,$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 et $\bar{y} \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)| \leq C \ .$$

Pour résoudre numériquement cette équation différentielle, on considère une famille de méthodes à un pas définie de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = nh$ où h est le pas de temps; on considère des approximation y_n de $y(t_n)$ que l'on calcule par la formule de récurrence :

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \ ,$$

où ϕ est une fonction de la forme :

$$\phi(t, z, h) = a_1 f(t+p_1 h, z+q_1 h f(t, z)) + a_2 f(t+p_2 h, z+q_2 h f(t, z)) + a_3 f(t+p_3 h, z+q_3 h f(t, z)) \ ,$$

avec $a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.
1. Donner des conditions sur les paramètres $a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ pour que cette méthode soit stable et consistante.
2. En déduire pour quelles valeurs de ces paramètres, cette méthode est convergente.
3. Donner des conditions sur $a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ pour que cette méthode soit d'ordre 2.
4. Comparer ces résultats avec une méthode approchée de calcul de l'intégrale $\int_t^{t+h} f(s, y(s))ds$.