Faculté des Sciences et Techniques - TOURS — Année 2007-2008
Licence de Mathématiques – Module O_5
Analyse numérique des équations différentielles.

EXAMEN FINAL
(Durée 3h)

Exercice 1
Soit $E = \mathcal{P}_3(I\!R)$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère sur E les formes linéaires suivantes :

$$\phi_1 : P \mapsto P(-1), \quad \phi_2 : P \mapsto P(0), \quad \phi_3 : P \mapsto P'(0), \quad \phi_4 : P \mapsto P(1).$$

1) Déterminer une base (P_1, P_2, P_3, P_4) dont la base duale est exactement $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$.
2) Soit f une fonction de classe C^4 sur $[-1, 1]$.
a) Déterminer un polynôme P tel que :

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = f(1).$$

Ce polynôme est-il unique?
b) Démontrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\xi_x \in]-1, 1[$ tel que l'on ait une formule d'erreur du type :

$$f(x) - P(x) = A_x Q(\xi_x).$$

où Q est un polynôme unitaire de degré 4 que l'on précisera et A_x est une constante qui dépend de x et de f, et dont on donnera une expression précise en fonction de f et de ses dérivées.
(On pourra considérer la fonction $g : t \mapsto f(t) - P(t) - AQ(t)$ et montrer que l'on peut choisir la constante A pour que g' s'annule en au moins quatre points de l'intervalle $]-1, 1[$.)
3) Déterminer les cœfficients de la formule d'intégration :

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \lambda_1 f(-1) + \lambda_2 f(0) + \lambda_3 f'(0) + \lambda_4 f(1)$$

pour qu'elle soit exacte pour les polynômes de E.
4) On utilise cette formule de quadrature dans une méthode composée pour le calcul approché de $\int_a^b f(t)dt$ utilisant les points $x_i = a + i\dfrac{b-a}{N}$ et on note $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{N}$.
Écrire la formule donnant la valeur approchée de l'intégrale.
5) Pour $f \in C^\infty(I\!R)$, l'erreur commise est d'ordre h^K. Déterminer la valeur de K.

Exercice 2
Sur l'espace $C([-1,1])$, on considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par : pour tous $f, g \in C([-1,1])$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2\, dx \ .$$

1. Déterminer une base de $\mathcal{P}_3(I\!R)$ orthogonale pour ce produit scalaire.
2. En déduire des points x_1, x_2, x_3 puis des constantes λ_1, λ_2, λ_3 tels que la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2\, dx \approx \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) \ ,$$

soit vraie pour $f \in \mathcal{P}_l(I\!R)$ pour un entier l le plus grand possible, que l'on donnera explicitement.

Exercice 3
On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y(0) = \bar{y} \ ,$$

où $f : I\!R \times I\!R \to I\!R$ est une fonction de classe C^2 et $\bar{y} \in I\!R$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in I\!R$ et $y \in I\!R$:

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)| \leq C \ .$$

1. Rappelez très brièvement pourquoi cette condition implique l'existence et l'unicité de la solution $y(\cdot)$ de l'équation différentielle qui est définie sur $[0, +\infty[$.

Pour résoudre numériquement cette équation différentielle, on considère une famille de méthodes à un pas définie de la manière suivante : pour $n \in I\!N$, $t_n = nh$ où h est le pas de temps; on considère des approximation y_n de $y(t_n)$ que l'on calcule par la formule de récurrence :

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \ ,$$

où ϕ est une fonction de la forme :

$$\phi(t, z, h) = a_1 f(t + p_1 h, z) + a_2 f(t, z + p_2 h f(t, z)) \ ,$$

avec $a_1, a_2, p_1, p_2 \in I\!R$.
2. Donner des conditions sur les paramètres a_1, a_2, p_1, p_2 pour que cette méthode soit stable et consistante.
3. En déduire pour quelles valeurs de a_1, a_2, p_1, p_2, cette méthode est convergente.
4. Donner des conditions sur les paramètres a_1, a_2, p_1, p_2 pour que cette méthode soit d'ordre 2.
5. En déduire la forme générale des fonctions ϕ (définies comme ci-dessus) qui donnent une méthode d'ordre 2. (On pourra montrer qu'il s'agit d'une famille à un paramètre et utiliser, par exemple, le paramètre $\alpha = a_1$.)