

**EXAMEN FINAL**  
 (Durée 3h)

**I. Equations elliptiques.** On considère le problème de Dirichlet :

$$(P) \quad \begin{cases} -u'' + xu' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)u = f & \text{dans } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$ .

1. En introduisant  $v = u \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ , calculer une solution explicite de (P). En déduire que  $u$  est de classe  $C^4$ .

On considère maintenant le problème variationnel :

$$(P') \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que :} \\ J(u) = \min_{v \in H_0^1(]0, 1[)} J(v), \end{cases}$$

où :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \left[ (v'(t))^2 - tv'(t)v(t) + \frac{t^2}{4}(v(t))^2 \right] dt - \int_0^1 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) f(t)v(t) dt .$$

2. Montrer que la solution  $u$  de (P) est aussi solution de (P'). (On montrera d'abord que  $J(u) \leq J(u+h)$  pour tout  $h \in C_0^1(]0, 1[)$  puis on donnera, en une phrase, les arguments qui montrent que cette inégalité reste vraie pour tout  $h \in H_0^1(]0, 1[)$ , sans chercher à les justifier précisément.)

3. SANS UTILISER LE CHANGEMENT DE VARIABLE DE LA QUESTION 1, prouver que, si  $v, w \in C^2(]0, 1[) \cap C(]0, 1[)$  sont des fonctions satisfaisant :

$$\begin{aligned} -v'' + xv' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)v &\leq g & \text{dans } ]0, 1[ , \\ -w'' + xw' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)w &\geq h & \text{dans } ]0, 1[ , \\ v(0) \leq w(0) & , \quad v(1) \leq w(1) , \end{aligned}$$

où  $g, h \in C([0, 1])$ , alors :

$$\max_{[0,1]} (v - w) \leq 4 \max_{[0,1]} (g - h)$$

4. En déduire que  $\|u\|_\infty \leq 4\|f\|_\infty$ .

Pour résoudre (P), on considère une grille uniforme :  $x_j = j\Delta x$  pour  $j = 0, \dots, N+1$  avec  $\Delta x = \frac{1}{N+1}$  et le schéma d'approximation numérique :

$$-\frac{(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)}{(\Delta x)^2} + x_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_j^2}{4}\right) u_j = f_j,$$

où  $u_j$  est une approximation de  $u(x_j)$  (avec la convention habituelle  $u_0 = u_{N+1} = 0$ ) et  $f_j = f(x_j)$ .

5. Dire rapidement pourquoi ce schéma est consistant et donner son ordre.

6. Montrer que ce schéma est monotone si  $\Delta x$  est suffisamment petit. En déduire que, pour de tels  $\Delta x$ , si  $(v_j)_j, (w_j)_j, (g_j)_j, (h_j)_j$  satisfont :

$$\begin{aligned} -\frac{(v_{j+1} + v_{j-1} - 2v_j)}{(\Delta x)^2} + x_j \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_j^2}{4}\right) v_j &\leq g_j \\ -\frac{(w_{j+1} + w_{j-1} - 2w_j)}{(\Delta x)^2} + x_j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_j^2}{4}\right) w_j &\geq h_j \end{aligned}$$

alors :

$$\max_j (v_j - w_j) \leq 4 \max_j (g_j - h_j).$$

7. Sans faire tous les calculs mais en décrivant simplement les étapes, expliquer alors pourquoi on a, pour la solution  $(u_j)_j$  du schéma :

$$\max_j |u_j - u(x_j)| = O((\Delta x)^2).$$

## II. Equation de transport

Pour l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T),$$

on considère le schéma d'approximation numérique :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \theta \lambda (u_{j+1}^n - u_j^n) - (1 - \theta) \lambda (u_j^n - u_{j-1}^n),$$

où  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  est un paramètre dépendant du schéma choisi.

(i) Donner des conditions sur  $\theta$  pour que ce schéma soit consistant et préciser son ordre.

(ii) Déterminer les conditions que doivent satisfaire  $\lambda$  et  $\theta$  pour que le schéma soit stable.

(Indications : on pourra tout exprimer en fonction de  $X = \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \in [0, 1]$  et remarquer que la propriété  $aX + b \geq 0$  pour tout  $X \in [0, 1]$  est équivalente à  $b \geq 0$  et  $a + b \geq 0$ , conditions obtenues en faisant  $X = 0$  et  $X = 1$ .) On vérifiera que la condition obtenue sur  $\theta$  implique qu'il faut privilégier la partie décentré arrière du schéma.)