Faculté des Sciences et Techniques - TOURS — Année 2003-2004
Module UEL1/O1 : Analyse Numérique des EDP'S (I).

EXAMEN FINAL
(Durée 3h)

I. Equations elliptiques.

On rappelle que, pour tout $g \in C([0,1])$ et pour tout $\mu > 0$, le problème :

$$\begin{cases} -w''(x) + \mu w(x) = g(x) & \text{dans }]0,1[\\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution $w \in C^2([0,1])$ qui satisfait $||w||_\infty \leq \frac{1}{\mu}||g||_\infty$.

On se propose de résoudre l'équation :

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x) & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où a et f sont des fonctions continues sur $[0,1]$. On suppose de plus qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que $a(x) \geq \beta$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. On pose $\mu := \frac{1}{2}\left(\max_{x\in[0,1]} a(x) + \min_{x\in[0,1]} a(x)\right)$ et on considère l'application $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ qui, à $v \in C([0,1])$, fait correspondre $u = Tv$ l'unique solution de :

$$\begin{cases} -u''(x) + \mu u(x) = f(x) - (a(x) - \mu)v(x) & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Dire pourquoi T est bien définie et prouver que T est contractante.

2. En déduire que le problème (P) admet une unique solution et que cette solution est de classe C^4 si a et f sont de classe C^2.

3. Montrer que, si $u \in C^2([0,1])$ est une solution de (P) alors u est aussi l'unique solution du problème :

$$\text{(P')} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que :} \\ \\ J(u) = \min_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v), \end{cases}$$

où :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^1 a(t)[v(t)]^2 dt - \int_0^1 f(t)v(t)dt\ .$$

4. Démontrer que si $u_1, u_2 \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ satisfont $u_1(0) \leq u_2(0)$, $u_1(1) \leq u_2(1)$ et :

$$-u_1''(x) + a(x)u_1(x) \leq f_1(x) \quad \text{dans }]0,1[\ ,$$

$$-u_2''(x) + a(x)u_2(x) \geq f_2(x) \quad \text{dans }]0,1[\ ,$$

où $f_1, f_2 \in C([0,1])$ alors :

$$\max_{x\in[0,1]} (u_1(x) - u_2(x)) \leq \frac{1}{\beta} \max_{x\in[0,1]} (f_1(x) - f_2(x))^+ \ ,$$

où si $t \in I\!\!R$, $t^+ = max(t, 0)$.

5. On suppose que a et f sont de classe C^2 et on considère le schéma d'approximation numérique :

$$-\frac{u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}(a(x_{j+1}) + a(x_{j-1}))u_j = f_j \ ,$$

pour $1 \leq j \leq N$, où $x_j = j\Delta x$, $\Delta x = \frac{1}{N+1}$, u_j est une approximation de $u(x_j)$ et $f_j = f(x_j)$.

Montrer que ce schéma est consistant et déterminer son ordre.

6. Prouver que ce schéma s'écrit sous la forme :

$$AU = F \ ,$$

où $U = (u_j)_j$ et $F = (f_j)_j$ et dire pourquoi A est inversible.

7. Montrer que si $V \in I\!\!R^N$ satisfait :

$$(AV)_j \leq G_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N \ ,$$

où $G = (G_j)_j \in I\!\!R^N$, alors :

$$\max_{1\leq j\leq N} V_j \leq \frac{1}{\beta} \max_{1\leq j\leq N} G_j^+ \ ,$$

où $G_j^+ = \max(G_j, 0)$ pour $1 \leq j \leq N$.

8. En déduire que $||U||_\infty \leq \frac{1}{\beta}||F||_\infty$ et que l'on a une convergence en $O((\Delta x)^2)$ pour ce schéma.

II. Equations d'évolution.

Pour l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } I\!\!R \times (0,T) \ ,$$

on considère le schéma d'approximation numérique :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) \ .$$

1. Montrer que ce schéma est consistant et déterminer son ordre.

2. Étudier sa stabilité.