

Chapitre 3

Equations Paraboliques

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à des équations dont le modèle est l'équation de la chaleur :

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T)$$

associée à la donnée initiale :

$$(3.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

où u_0 est une fonction donnée.

3.1 Approche Théorique

Notre premier résultat montre que l'on a une solution explicite définie sur un certain intervalle de temps $(0, T)$ si u_0 vérifie la condition à l'infini suivante :

$$(3.3) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) \varepsilon^{-A|x|^2} = 0$$

pour une certaine constante $A > 0$.

Proposition 3.1. *On suppose que u_0 est une fonction continue qui satisfait la propriété (3.3) ; alors la fonction u définie par :*

$$(3.4) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) u_0(y) dy$$

est une solution de (3.1)-(3.2) avec $T = 1/(2A)$.

Remarque : si $t \in]0, T[$ avec $T = 1/(2A)$, l'intégrale écrite dans la proposition a bien un sens, d'où le choix de T qui est optimal.

Preuve : On va calculer la solution fondamentale de l'équation (3.1) *i.e.* la solution de (3.1) associée à la donnée initiale suivante :

$$(3.5) \quad u(x, 0) = \delta_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

où δ_0 est la masse de Dirac centrée en $x = 0$. On notera $\rho(x, t)$ cette solution. La solution u est alors donnée à partir de ρ via la formule :

$$u(x, t) = \left(\rho(\cdot, t) * u_0 \right)(x)$$

où la convolution agit dans la variable d'espace seulement. En effet, d'après les propriétés de la convolution, si ρ est une fonction régulière,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) * u_0 = 0$$

et :

$$\left(\rho(\cdot, t) * u_0 \right)(x) \rightarrow u_0(x) \quad \text{quand } t \rightarrow 0$$

(ces propriétés deviendront plus claires après le calcul explicite de ρ).

Maintenant, pour calculer ρ , on raisonne formellement en introduisant la transformée de Fourier en x :

$$\hat{\rho}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) \varepsilon^{-i\xi x} dx$$

et on applique cette transformée de Fourier à l'équation. Il est bien connu que :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial \rho}{\partial t}}(\xi, t) &= \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}(\xi, t) \\ \widehat{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}}(\xi, t) &= -\xi^2 \hat{\rho}(\xi, t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \xi^2 \hat{\rho} \right)(\xi, t) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T)$$

avec :

$$\hat{\rho}(\xi, 0) = 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Il en résulte de l'intégration de cette équation différentielle en t que :

$$\hat{\rho}(\xi, t) = \exp\left(-\frac{t\xi^2}{2}\right) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T).$$

Or la transformée de Fourier de $\exp(-a\xi^2)$ est : $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right)$, de sorte que l'on obtient une formule explicite pour ρ :

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

puisqu'en effet la transformée de Fourier inverse est :

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\xi, t) \varepsilon^{i\xi x} d\xi.$$

On peut aussi vérifier directement et de manière élémentaire que la fonction u donnée dans l'énoncé de la proposition est bien solution de l'équation. \square

Pour simplifier l'exposé, on ne va considérer désormais que le cas où u_0 est bornée ; les cas avec des conditions de croissance plus générales peuvent être traités de manière analogue mais plus technique. Donnons maintenant quelques propriétés de la fonction u .

Proposition 3.2. *La fonction u donnée par (3.4) vérifie :*

(i) $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R} \times [0, \infty[) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ et on a :

$$\left| \frac{\partial^{k+\ell} u}{\partial t^k \partial x^\ell}(x, t) \right| \leq \frac{C(k, \ell) \|u_0\|_\infty}{(\sqrt{t})^{2k+\ell}}.$$

(ii) u est l'unique solution de (3.1)-(3.2) dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R} \times [0, \infty[) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$.

(iii) Si $v \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R} \times [0, \infty[) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ est associée à la donnée initiale v_0 alors :

$$\begin{aligned} u_0 \leq v_0 &\implies u \leq v \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ \|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))} &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Preuve : La preuve de (i) repose sur des arguments de convolution classique : u est de classe \mathcal{C}^∞ car ρ l'est. De plus, pour l'estimation des dérivées on utilise les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(\cdot, t) * u_0 \right)(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(\cdot, t) * u_0 \right)(x). \end{aligned}$$

Montrons alors que les estimations sont vraies pour les dérivées premières, le résultat complet s'obtenant par récurrence.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{1}{2t^{3/2}\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) u_0(y) dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) \frac{|y-x|^2}{2t^2} u_0(y) dy. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $z = (y-x)/\sqrt{t}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{1}{2t\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) u_0(x+z\sqrt{t}) dz \\ &+ \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |z|^2 \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) u_0(x+z\sqrt{t}) dz. \end{aligned}$$

On obtient la majoration de $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|$ en majorant $|u_0(x + \sqrt{t})|$ par $\|u_0\|_\infty$ dans ces intégrales. De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{y-x}{t}\right) \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) u_0(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} z \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) u_0(x + z\sqrt{t}) dz,\end{aligned}$$

et on conclut comme dans le premier cas.

Remarque : bien entendu, ces estimations ne sont pas optimales. Si u_0 est plus régulier et si on a un contrôle suffisant sur la taille de ces dérivées, on écrit :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) u_0(x + z\sqrt{t}) dz,$$

et on fait porter les dérivées sur u_0 . Par exemple, si u_0 est de classe \mathcal{C}^1 avec une dérivée bornée, il est clair que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right| &\leq \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_\infty, \\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right| &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Pour démontrer (ii), on considère une autre solution v . On va seulement prouver que $u \leq v$, l'autre inégalité s'obtenant de manière analogue. Pour cela on se fixe $T > 0$ quelconque et on considère :

$$\max_{\mathbb{R} \times [0, T]} \left(u(x, t) - v(x, t) - \alpha(2t + |x|^2)\right),$$

où $\alpha > 0$ est assez petit. Comme u et v sont bornées, on a :

$$u(x, t) - v(x, t) - \alpha(2t + |x|^2) \rightarrow -\infty \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty,$$

donc on a bien affaire à un maximum qui est atteint en un point (x_0, t_0) . Par les propriétés habituelles en un point de maximum, si $t_0 > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(u(x, t) - v(x, t) - \alpha(2t + |x|^2)\right)(x_0, t_0) &\geq 0 \quad (\text{et } = 0 \text{ si } t_0 < T) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u(x, t) - v(x, t) - \alpha(2t + |x|^2)\right)(x_0, t_0) &\leq 0\end{aligned}$$

Ces deux propriétés combinées impliquent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_0, t_0) - \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) - 2\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0, t_0) - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_0, t_0) - 2\alpha\right) \geq 0$$

mais, en utilisant l'équation, il vient :

$$-\alpha \geq 0,$$

ce qui est une contradiction. On a donc nécessairement $t_0 = 0$ et :

$$u(x_0, t_0) - v(x_0, t_0) - \alpha(2t_0 + |x_0|^2) \leq u_0(x_0) - u_0(x_0) = 0.$$

Donc le maximum est négatif pour tout $\alpha > 0$, *i.e.*

$$u(x, t) - v(x, t) \leq \alpha(2t + |x|^2) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [0, T]$$

pour tout $\alpha > 0$ et $T > 0$. On conclut en faisant tendre α vers 0 ce qui donne $u \leq v$ dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ puisque $T > 0$ est arbitraire.

Enfin, la preuve de (iii) est aisée, il suffit de majorer les intégrales de convolutions ou d'utiliser l'argument ci-dessus pour la preuve de (ii). \square

Remarque : On n'a pas ici de propriété de vitesse finie de propagation : au contraire, au point (x, t) , $t > 0$, u dépend vraiment des valeurs de u_0 sur \mathbb{R} tout entier. C'est une différence fondamentale entre équations paraboliques et équations hyperboliques.

3.2 Approche Numérique

Avant de considérer de “vrais” schémas numériques, intéressons-nous à une semi-discrétisation en temps seulement. On note $u^{(n)}(x)$ une approximation de $u(x, n\Delta t)$ où $\Delta t > 0$. En discrétisant en t l'équation et en adoptant un schéma implicite, on obtient :

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

D'où $u^{(n+1)}$ est solution de l'équation :

$$-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} + u^{(n+1)} = u^{(n)} \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

qui est une équation elliptique que nous avons déjà étudiée, à part qu'ici elle est posée dans \mathbb{R} tout entier.

Ce lien entre équations elliptiques et paraboliques est très important, tant du point de vue théorique que numérique : il permet d'obtenir des résultats généraux d'existence, ...

3.2.1 Mise en place des principaux schémas

Il y a trois schémas numériques “classiques” pour calculer la solution de (3.1)-(3.2) qui sont les suivants : le schéma explicite standard (SES), le schéma implicite standard (SIS) et les θ -schémas de Crank-Nicolson ; nous n'étudierons ici en détail que les deux premiers.

SCHÉMA EXPLICITE STANDARD :

$$(SES) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Comme dans le cas des équations hyperboliques, on étudie la stabilité par une analyse de Fourier ; si $u_j^n = \gamma \exp(ikj\Delta x)$, alors :

$$u_j^{n+1} = g(\lambda, k\Delta x)u_j^n, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}.$$

Le calcul de g donne :

$$\begin{aligned} g(\lambda, k\Delta x) &= 1 + 2\lambda(\cos(k\Delta x) - 1) \\ &= 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

Tout d'abord, comme $\lambda \geq 0$, on a bien $g(\lambda, k\Delta x) \leq 1$. Pour avoir maintenant $g(\lambda, k\Delta x) \geq -1$, il est nécessaire d'avoir $\lambda \leq 1/2$, *i.e.*

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1,$$

c'est la condition de CFL. Il est à noter que cette condition est équivalente à la monotonie du schéma ; en effet, on peut le réécrire sous la forme suivante :

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j+1}^n + \lambda u_{j-1}^n + (1 - 2\lambda)u_j^n$$

de telle sorte que, si $\lambda \leq 1/2$, on a la propriété de monotonie :

$$u_j^n \geq 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \implies u_j^{n+1} \geq 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z},$$

ou encore :

$$u_j^n \geq v_j^n \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \implies u_j^{n+1} \geq v_j^{n+1} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

On retrouve ainsi une version "discrète" de la propriété de principe de maximum (et de comparaison) satisfaite par l'équation.

Le schéma (SES) est consistant, un calcul simple montre qu'il est d'ordre **2** en x et d'ordre **1** en t .

Remarque : La condition de CFL est désagréable car elle implique que l'on doit prendre Δt de l'ordre de $(\Delta x)^2$, c'est-à-dire extrêmement petit. On "avance" ainsi très peu vite en temps et pour calculer $u(x, t)$ il faut beaucoup d'itérations. En revanche, à chaque pas d'itération, le schéma calcule vite la solution puisqu'il est explicite⁽¹⁾.

⁽¹⁾ ceci est à comparer avec le schéma implicite standard pour lequel on est pas obligé de prendre Δt petit, mais en revanche il faut résoudre un système linéaire à chaque itération - le choix d'un "bon" schéma n'est donc pas évident *a priori*.

SCHÉMA IMPLICITE STANDARD :

$$(SIS) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Pour étudier la stabilité de ce schéma, on peut adopter deux stratégies : une par Fourier, l'autre par principe de maximum.

Par Fourier, on a :

$$g(\lambda, k\Delta x) = \left[1 - 2\lambda(\cos(k\Delta x) - 1) \right]^{-1} \leq 1,$$

car $\cos(k\Delta x) - 1 \leq 0$, donc le schéma implicite est inconditionnellement stable.

Cette propriété peut être obtenue par un argument heuristique de type principe de maximum. Supposons $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ borné et montrons que :

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{n+1}| \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n|.$$

On ne va démontrer que l'inégalité :

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{n+1} \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n,$$

celle avec les valeurs absolues s'obtenant ou bien en raisonnant de la même façon avec le min, ou bien en changeant les u_j^{n+1}, u_j^n en $-u_j^{n+1}, -u_j^n$ et en utilisant le résultat pour le max pour les $-u_j^{n+1}, -u_j^n$.

Supposons donc que le premier maximum est atteint en j_0 . Cela entraîne, en utilisant le schéma :

$$u_{j_0}^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j_0+1}^{n+1} + u_{j_0-1}^{n+1} - 2u_{j_0}^{n+1}) = u_{j_0}^n.$$

Mais $u_{j_0+1}^{n+1} \leq u_{j_0}^{n+1}$ et $u_{j_0-1}^{n+1} \leq u_{j_0}^{n+1}$, donc :

$$u_{j_0+1}^{n+1} + u_{j_0-1}^{n+1} - 2u_{j_0}^{n+1} \leq 0,$$

(ce qui n'est rien d'autre qu'une version "discrète" du fait que la dérivée seconde est négative au sens large en un point de maximum!) et ainsi :

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{n+1} = u_{j_0}^{n+1} \leq u_{j_0}^n \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n.$$

Il est à noter que cette propriété signifie que le schéma est inconditionnellement monotone, *i.e.*

$$u_j^n \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \implies u_j^{n+1} \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Comme le schéma (SES), le schéma (SIS) est consistant et d'ordre **1** en temps, **2** en espace.

3.2.2 Convergence des schémas

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1. *On suppose que u_0 est bornée, uniformément continue sur \mathbb{R} . Alors la solution $(u_j^n)_{n,j}$ des schémas (SES) quand la condition de CFL est satisfaite et (SIS) (inconditionnellement) converge uniformément vers u sur $\mathbb{R} \times [0, T]$ pour tout $T > 0$, i.e.*

$$\max_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}}} |u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \Delta x + \Delta t \rightarrow 0.$$

Preuve : Elle se calque sur la preuve de convergence des schémas donnée dans le premier chapitre :

ETAPE 1 : on traite le cas où u_0 est de classe \mathcal{C}^4 avec $u_0^{(k)}$ bornées pour $0 \leq k \leq 4$. On injecte les valeurs de $u(j\Delta x, n\Delta t)$ dans le schéma et on utilise la monotonie pour montrer que :

$$|u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)| \leq Cn\Delta t [(\Delta x)^2 + \Delta t],$$

où $C[(\Delta x)^2 + \Delta t]$ est le terme d'erreur que l'on commet à chaque étape en remplaçant u_j^n par $u(j\Delta x, n\Delta t)$, et :

$$Cn\Delta t [(\Delta x)^2 + \Delta t]$$

et une "sur-solution" qui permet de prendre en compte cette erreur.

ETAPE 2 : on approche u_0 qui est bornée et uniformément continue par des fonctions $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$ qui sont de classe \mathcal{C}^4 avec les quatre premières dérivées bornées. Cette approximation uniforme (obtenue par convolution) est rendue possible par l'uniforme continuité de u_0 . On raisonne ensuite comme dans le Chapitre 1, en utilisant le formule explicite qui donne u, u^ε, \dots etc. \square

Remarque : Dans le cas où u_0 est \mathcal{C}^4 , avec $u_0^{(k)}$ borné pour $0 \leq k \leq 4$, on a bien une convergence en $(\Delta t)^1 + (\Delta x)^2$ comme le prévoit l'ordre du schéma.

3.2.3 Aproximation par domaine de calcul borné

A cause de la vitesse infinie de propagation des informations, ce problème apparait comme non trivial. Pourtant, si l'on considère par exemple le problème suivant :

$$(3.1') \quad \frac{\partial u^R}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^R}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans }]-R, R[\times (0, \infty)$$

avec la condition initiale suivante :

$$(3.2') \quad u^R(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans }]-R, R[$$

et la condition de bord :

$$(3.3') \quad u^R(\pm R, t) = u_0(\pm R) \quad \text{pour } t > 0,$$

on peut montrer que $u^R \rightarrow u$ localement uniformément quand $R \rightarrow \infty$. La semi-discrétisation en temps que nous avons évoqué montre que ce problème se ramène à ce que nous avons vu au Chapitre 1.

N.B. : la condition aux limites artificielle (3.3') peut (en fait, doit!) être remplacée la plupart du temps par une condition plus adaptée et plus astucieuse!!!

Exercice 13. Pour l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T),$$

on considère le schéma d'approximation numérique :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + (1-\theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}),$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la condition de stabilité.

2. À quelle condition, ce schéma est-il monotone? Vérifier alors que, si on suppose la donnée initiale $(u_j^0)_j$ bornée, $(u_j^n)_j$ est aussi borné pour tout n et on a $\max_j u_j^n \leq \max_j u_j^0$ et $\min_j u_j^n \geq \min_j u_j^0$.

3.3 Exercices