Introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques

G. Barles

7 février 2014

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce cours est double : d'abord il s'agit de décrire les deux approches les plus classiques pour étudier l'existence, l'unicité et la régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques posées dans un domaine borné avec des conditions aux limites de Dirichlet : l'approche directe de l'équation et l'approche variationnelle. Ce sera l'occasion – et c'est le deuxième objectif du cours – de manipuler plusieurs espaces fonctionnels et des résultats classiques d'Analyse hilbertienne (avec un intérêt tout particulier pour la convergence faible) ou d'Analyse fonctionnelle (théorèmes de points fixes, compacité,...etc).

Dans le cadre qui nous intéresse (équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires ou non linéaires), les équations linéaires jouent un rôle clé et nous y consacrons toute la première partie. La seconde partie s'attaque à des problèmes non linéaires que l'on verra essentiellement comme des "perturbations" d'équations linéaires.

Pour ne pas multiplier les difficultés et rester dans un cadre relativement simple, nous ne présenterons que le cas de la dimension 1, tout en privilégiant des méthodes qui s'étendent en dimensions supérieures avec (évidemment) des aménagements ad hoc.

Première partie

Équations elliptiques linéaires : le problème de Dirichlet

2 Résolution explicite

On s'intéresse ici à l'équation elliptique linéaire :

$$-u''(x) + \lambda^2 u(x) = f(x) \quad \text{dans } (0,1) \tag{1}$$

où λ est un réel positif (le carré s'expliquera plus loin) et f est, dans un premier temps, une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche une solution u aussi régulière que possible qui satisfait (1) soit au sens classique (solution C^2 qui satisfait l'équation en tout point), soit quand f est moins régulière, une solution au sens presque partout ou au sens des distributions.

Pour résoudre (1), il faut lui associer des *conditions aux limites*. Nous étudierons en détails le cas où (1) est associé à des conditions de Dirichlet *homogènes* :

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Mais nous considèrerons aussi le cas de conditions de Dirichlet non homogènes :

$$u(0) = \alpha \qquad u(1) = \beta\ , \tag{3}$$

où α et β sont deux nombres réels donnés.

Commençons par résoudre (1)-(2) de manière explicite. On introduit $U(x) := \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$ et on remarque que U satisfait l'équation différentielle :

$$U'(x) = AU(x) + B(x)\ ,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}\ .$$

On sait alors que U est donné par :

$$U(x) = \exp(xA)U(0) + \int_0^x \exp((x-y)A)B(y)dy\ .$$

Pour exploiter cette formule, on remarque que $A^2 = \lambda^2 Id$, ce qui montre que, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(tA) = \cosh(\lambda t)Id + \lambda^{-1}\sinh(\lambda t)A\ .$$

où $\cosh, \sinh$ désignent respectivement le cosinus et le sinus hyperbolique [la simplicité de cette formule explique le λ^2 qui évite la racine].

Il en résulte, en utilisant le fait que $u(0) = 0$:

$$u(x) = \lambda^{-1} \sinh(\lambda x) u'(0) - \int_0^x \lambda^{-1} \sinh(\lambda(x-y)) f(y) dy \; .$$

Il reste à utiliser la condition $u(1) = 0$:

$$0 = \sinh(\lambda) u'(0) - \int_0^1 \sinh(\lambda(1-y)) f(y) dy \; ,$$

ce qui permet de déterminer $u'(0)$ et donne :

$$u(x) = \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda \sinh(\lambda)} \int_0^1 \sinh(\lambda(1-y)) f(y) dy - \int_0^x \lambda^{-1} \sinh(\lambda(x-y)) f(y) dy \; .$$

Afin de donner une forme finale à l'expression, on scinde la première intégrale en deux, de 0 à x et de x à 1. Sur $(0, x)$, on utilise :

$$\sinh(\lambda(1-y)) = \sinh(\lambda)\cosh(\lambda y) - \cosh(\lambda)\sinh(\lambda y) \; ,$$

$$\sinh(\lambda(x-y)) = \sinh(\lambda x)\cosh(\lambda y) - \cosh(\lambda x)\sinh(\lambda y) \; ,$$

ce qui conduit à une expression (pour les $\cosh, \sinh$) que l'on peut réécrire :

$$\frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda)} \left[-\cosh(\lambda)\sinh(\lambda x) + \cosh(\lambda x)\sinh(\lambda) \right] = \frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda(1-x)) \; .$$

D'où la formule finale :

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sinh(\lambda y)}{\lambda \sinh(\lambda)} \sinh(\lambda(1-x)) f(y) dy + \int_x^1 \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda \sinh(\lambda)} \sinh(\lambda(1-y)) f(y) dy \; .$$

On retrouve ainsi la forme générale des solutions d'équations du second ordre, dites de *Sturm-Liouville*, qui conduirait à écrire de manière plus générale :

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \; \mathrm{d}y \; , \tag{4}$$

où K est un "noyau" positif qui, dans notre cas, est défini par :

$$K(x,y) = \begin{cases} \frac{\sinh(\lambda y)}{\lambda \sinh(\lambda)} \sinh(\lambda(1-x)) & \text{si } y \leq x \, , \\ \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda \sinh(\lambda)} \sinh(\lambda(1-y)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avant d'exploiter cette forme de la solution, indiquons que (1)-(3) peut être résolu en ajoutant à la solution u ci-dessus, une solution du problème homogène ($f \equiv 0$) qui satisfait (3), i.e.

$$\alpha \cosh(\lambda t) + \frac{(\beta - \alpha \cosh(\lambda))}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda t) \; .$$

Nous terminons cette section par quelques propriétés du noyau K.

Proposition I.1. *Pour tout $\Lambda > 0$, il existe une constante $C(\Lambda)$ telle que, pour tous $x, x', y \in [0,1]$:*

$$0 \leq K(x,y) \leq C(\Lambda) \ , \ |K(x',y) - K(x,y)| \leq C(\Lambda)|x - x'| \ .$$

Il est à noter que K (globalement ou comme fonction de x) n'est pas de classe C^1.

3 Quelques propriétés des solutions du problème de Dirichlet

Commençons par énoncer les propriétés élémentaires qui découlent des formules ci-dessus.

Proposition I.2.
1. Pour toute fonction $f \in C([0,1])$, il existe une unique solution $u \in C^2([0,1])$ du problème de Dirichlet homogène (1)-(2).
2. Si $f \in C^k([0,1])$ pour $k \geq 1$, la solution u de (1)-(2) est de classe C^{k+2} sur $[0,1]$ et :

$$||u^{(l)}||_\infty \leq \lambda^2 ||u^{(l-2)}||_\infty + ||f^{(l-2)}||_\infty \qquad \text{pour } 2 \leq l \leq k+2.$$

3. Si $g \in C([0,1])$ et si v est l'unique solution de (1)-(2) associée au second membre g, on a :
- *Si $f \leq g$ sur $[0,1]$ alors $u \leq v$ sur $[0,1]$,*
- $||u - v||_\infty \leq C(\Lambda)||f - g||_\infty$,
- $||u' - v'||_\infty \leq C(\Lambda)||f - g||_\infty$.

Remarque I.1. *En prenant $v = g = 0$, on a, en particulier :*

$$||u||_\infty \leq C(\Lambda)||f||_\infty \quad , \quad ||u'||_\infty \leq C(\Lambda)||f||_\infty \ ,$$

si u est une solution du problème.

Preuve :
1. L'existence, l'unicité et la régularité de u découlent de l'expression trouvée précédemment.
2. C'est encore une conséquence du point 1 et un raisonnement par récurrence, l'inégalité s'obtenant en dérivant par l'équation un certain nombre de fois pour les dérivées d'ordre supérieures à 2.
3. La linéarité de l'équation entraîne que la fonction $w = u - v$ est **la** solution de l'équation associée à la fonction $h = f - g$. On utilise alors l'égalité (4) pour w,

$$w(x) = \int_0^1 K(x,y)(f(y) - g(y)) \, \mathrm{d}y$$

puis la proposition I.1 qui donne les deux premières propriétés de manière immédiate. Pour la dernière, soit on dérive (4) au sens des distributions, soit on considère le quotient différentiel :

$$\frac{w(x+h)-w(x)}{h} \ ,$$

on applique la proposition I.1 et on fait tendre h vers 0.$\square$

Les deux premières propriétés du point 3) sont des cas particuliers d'un résultat plus général : le *principe du maximum* que l'on énonce maintenant.

Théorème I.1. *Soient u et v deux fonctions de $C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ satisfaisant :*

1. $-u'' + \lambda^2 u \leq f$ *sur* $(0,1)$ *(on dit que u est sous-solution de (1))*
2. $-v'' + \lambda^2 v \geq g$ *sur* $(0,1)$ *(on dit que v est sur-solution de (1))*
3. $u(0) \leq v(0)$ *et* $u(1) \leq v(1)$.

Alors, si les seconds membres f et g satisfont $f \leq g$ sur $[0,1]$, on a $u \leq v$ sur $[0,1]$.

Preuve : À la preuve basée sur l'expression explicite de la solution comme précédemment, on va substituer une preuve plus générale qui fonctionnerait même dans le cas où l'on n'a pas de formule explicite simple (équation avec des coefficients non constants, par exemple, ou en dimension supérieure).

Pour montrer que $u \leq v$ sur $[0,1]$, on considère $M = \max_{x\in[0,1]}(u-v)$ et on va prouver que $M \leq 0$.

Comme u, v sont continues sur le compact $[0,1]$, il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $M = u(x_0) - v(x_0)$. Deux cas se présentent :
– ou bien $x_0 \in \{0,1\}$ et dans ce cas le résultat est acquis par la 3ème propriété car on sait que $u(0) \leq v(0)$ et $u(1) \leq v(1)$,
– ou bien $0 < x_0 < 1$. Comme x_0 est un point de maximum local de $w = u - v$, on a, par des résultats d'Analyse classique :

$$w'(x_0) = 0 \ \text{ et } \ w''(x_0) \leq 0 \ .$$

Or, en combinant les propriétés 1 et 2 satisfaites par u et v, on a aussi :

$$-w''(x_0) + \lambda^2 w(x_0) \leq f(x_0) - g(x_0) \leq 0 \ .$$

Comme $w''(x_0) \leq 0$, on a bien $M = w(x_0) \leq 0$ si $\lambda^2 > 0$.

Si $\lambda = 0$ et si on a seulement $f \leq g$ sur $[0,1]$, il faut se ramener au cas d'une inégalité stricte et on va même le faire en remplaçant f par $f - \alpha$ pour $\alpha > 0$; on aura bien $f(x) - \alpha < g(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Un calcul élémentaire (ou la formule (4)) montre que la fonction $\phi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2}x(1-x)$ est solution du problème avec condition de Dirichlet homogène (1)-(2) avec second membre la fonction constante égale α. Considérons la fonction $\tilde{u}_\alpha =$

$u - \phi_\alpha$: elle satisfait une équation de (1) avec second membre égal à $f - \alpha$ et par ailleurs $\tilde{u}_\alpha(0) = u(0)$ et $\tilde{u}_\alpha(1) = u(1)$. Les arguments précédents montrent donc que

$$\tilde{u}_\alpha(x) \le v(x) \quad \text{sur } [0,1]$$

ce qui donne pour tout $\alpha > 0$

$$u(x) - \frac{\alpha}{2}x(1-x) \le v(x) \quad \text{sur } [0,1]$$

et on conclut en faisant tendre α vers zéro. $\square$

Remarque : Le lecteur pourra constater dans la liste d'exercice que les arguments de la preuve du Théorème I.1 peuvent être généralisés pour traiter des cas beaucoup plus complexes, y compris en dimension supérieure ; en analysant cette preuve, on voit, en effet, qu'elle ne repose que sur la compacité de $[0,1]$ (pour que le maximum soit atteint) et les propriétés des dérivées premières et secondes en un point de maximum local. Il s'agit donc de deux résultats basiques qui s'étendent sans difficulté en toutes dimensions. Il est à noter enfin que, par des arguments de perturbation du type de celui que nous avons utilisé dans la preuve (cf. $u \to \tilde{u}_\alpha$), on peut parfois se passer de la compacité du domaine...

Exercice 1. *Soit a est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $a(x) \ge \alpha > 0$ sur $[0,1]$ et f une fonction continue sur $[0,1]$.*
1. Résoudre explicitement le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -(a(x)u')' = f & \textit{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

2. En déduire les propriétés de la solution en fonction de celles de a et f.
3. Montrer que cette équation satisfait le principe du maximum.
(Si v est une sous-solution et w une sursolution (notions à définir), on pourra considerer $\max_{[0,1]} (v(x) - w(x) + \eta \exp(Kx))$ pour $0 < \eta \ll 1$ et pour une constante $K > 0$ bien choisie.)

Exercice 2. *On considère l'équation :*

$$-\Delta u + u = f \quad \textit{dans } B\ ,$$

où B est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, f est une fonction périodique, au moins continue et :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\ .$$

Formuler et démontrer le Principe du Maximum pour cette équation. Le fait que B soit la boule unité joue-t-il un rôle ?

4 L'approche variationnelle du problème de Dirichlet

On va montrer maintenant que la solution u de (1)-(2) possède une caractérisation variationnelle c'est-à-dire que u est l'unique solution d'un problème d'optimisation. On ne va le faire que dans le cas $\lambda = 0$.

On introduit d'abord l'espace fonctionnel :

$$C_0^1([0,1]) = \big\{ v \in C^1([0,1]) \ ; \ v(0) = 0, v(1) = 0 \big\} \ .$$

Il est à noter que cet espace est défini à la fois par une contrainte de régularité (C^1 sur $[0,1]$) et par la valeur imposée des fonctions en 0 et 1. De plus, $u \in C_0^1([0,1])$. Pour toute fonction $v \in C_0^1([0,1])$, on pose :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [v'(t)]^2 \ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)v(t) \ \mathrm{d}t$$

La première caractérisation variationnelle de u est donnée par la :

Proposition I.3. *La solution u de (1)-(2) satisfait :*

$$J(u) = \min_{w \in C_0^1([0,1])} J(w)$$

Ce type de résultat sera important à la fois du point de vue théorique que numérique car il signifie que pour calculer u, on peut envisager de résoudre un problème d'optimisation.

Preuve : Si $w \in C_0^1([0,1])$, il existe une fonction h de $C_0^1([0,1])$ telle que $w = u + h$. On a alors :

$$J(w) = J(u) + \int_0^1 u'(t)h'(t) \ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)v(t) \ \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 \ \mathrm{d}t.$$

Grâce à la régularité des fonctions et la nullité au bord de h, on peut intégrer par parties pour obtenir :

$$J(w) = J(u) + \int_0^1 \big(- u''(t) - f(t)\big)h(t) \ \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 \ \mathrm{d}t.$$

Comme u est solution de (1) et que $\int_0^1 (h'(t))^2 \ \mathrm{d}t \geq 0$, on obtient bien que $J(w) \geq J(u)$. □

Remarque : On montre facilement qu'une réciproque partielle est vraie, à savoir que si une fonction $u \in C^2([0,1]) \cap C_0^1([0,1])$ satisfait :

$$J(u) \leq J(w) \quad \text{pour tout } w \in C_0^1([0,1])$$

alors elle est solution [1] du problème (1).

En effet, le calcul précédent montre qu'alors :

$$\int_0^1 \big(-u''(t)-f(t)\big)h(t)\ \mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2\ \mathrm{d}t \geq 0 \quad \text{pour tout } h \in C_0^1([0,1]).$$

En remplaçant h par αh où $\alpha > 0$, on obtient :

$$\alpha\int_0^1 \big(-u''(t)-f(t)\big)h(t)\ \mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2\ \mathrm{d}t \geq 0 \quad \text{pour tout } h \in C_0^1([0,1])\ ,$$

et en divisant par α puis en faisant tendre α vers zéro, on a :

$$\int_0^1 \big(-u''(t)-f(t)\big)h(t)\ \mathrm{d}t \geq 0 \quad \text{pour tout } h \in C_0^1([0,1]).$$

Enfin, on change h en $-h$ ce qui conduit à :

$$\int_0^1 \big(-u''(t)-f(t)\big)h(t)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } h \in C_0^1([0,1])\ .$$

Cette propriété s'interprète de la manière suivante : la fonction $-u''(t)-f(t)$ en tant que fonction de $L^2(]0,1[)$ est orthogonale à $C_0^1([0,1])$ qui est dense dans $L^2(]0,1[)$ [2] donc $-u''(t)-f(t)=0$ presque partout et en fait partout puisque la fonction $-u''-f$ est continue.

Remarque : On peut préférer démontrer le résultat à la main, au lieu d'invoquer la densité (cela revient à redémontrer cette densité) : on procède par troncature et régularisation pour construire une suite $(h_\varepsilon)_\varepsilon$ de fonctions continues qui converge dans $L^2(]0,1[)$ vers la fonction $-u''-f$. Plus précisément, pour $0 \leq \varepsilon \ll 1$, on pose d'abord $\tilde{h}_\varepsilon = (-u''-f)\mathbb{1}_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ (phase de troncature) et on montre facilement que $\tilde{h}_\varepsilon \to -u''-f$ dans $L^2(]0,1[)$. Puis on régularise $\tilde{h}_\varepsilon$ par convolution, ce qui revient à poser $h_\varepsilon = \tilde{h}_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ où $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est votre suite d'approximation de l'unité favorite, en ayant soin de prendre ρ_ε à support compact dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et, pour faire bonne mesure, les ρ_ε de classe C^∞.

En fait, $C_0^1([0,1])$, bien que commode pour les intégrations par parties, n'est pas le bon espace fonctionnel pour attaquer le problème d'optimisation. Cela provient du fait que rien n'assure qu'une suite minimisante va converger vers un élément de $C_0^1([0,1])$. On va donc introduire le bon espace fonctionnel : c'est l'espace $H^1(]0,1[)$ ou plus exactement pour notre problème $H_0^1(]0,1[)$.

(1). ce n'est pas une réciproque complète car on doit supposer un peu plus de régularité sur u, plus précisément u de classe C^2.

(2). Se souvenir que l'espace des fonctions C^∞, à supports compacts est dense dans $L^2(]0,1[)$!

L'espace $H^1(]0,1[)$ est constitué des fonctions v de $L^2(]0,1[)$ pour lesquelles il existe un nombre réel μ et une fonction w de $L^2(]0,1[)$ tels que :

$$v(x) = \mu + \int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{p.p. dans }]0,1[$$

Proposition I.4. *Si $v \in H^1(]0,1[)$ alors le couple (μ, w) est unique.*

Preuve : Etant donné $v \in H^1(]0,1[)$, supposons l'existence de deux couples (μ, w) et $(\tilde{\mu}, \tilde{w})$ tels que :

$$v(x) = \mu + \int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t = \tilde{\mu} + \int_0^x \tilde{w}(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{p.p. dans }]0,1[.$$

En faisant tendre x vers zéro (3), on voit immédiatement que $\mu = \tilde{\mu}$. Il reste à montrer que la fonction $h(t) = w(t) - \tilde{w}(t)$ est nulle presque partout dans l'intervalle $[0,1]$. On sait, du fait que $\mu = \tilde{\mu}$, que $\int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t = 0$ pour presque tout x. Donc, si φ désigne une fonction continue sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 \varphi(x) \int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = 0$$

Mais le théorème de Fubini (dont le lecteur ou la lectrice vérifiera aisément qu'il s'applique) donne :

$$(5) \qquad \int_0^1 h(t) \int_t^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = 0.$$

En invoquant à nouveau la densité de $C_0^1([0,1])$ dans $L^2(]0,1[)$, on peut construire une suite de fonctions ψ_ε de $C_0^1([0,1])$ qui convergent vers h dans $L^2(]0,1[)$. On utilise alors (5) avec le choix $\varphi = -\psi'_\varepsilon$ pour tout ε et on obtient que $\int_0^1 \psi_\varepsilon(t) h(t)\ \mathrm{d}t = 0$ ce qui conduit à la limite à $\int_0^1 [h(t)]^2\ \mathrm{d}t = 0$. On a donc bien $h = 0$. $\square$

Si v est une fonction de classe $C^1([0,1])$, elle est dans l'espace $H^1(]0,1[)$ avec $\mu = v(0)$ et $w(t) = v'(t)$. Pour une fonction v de $H^1(]0,1[)$ quelconque, la fonction w s'interprète donc comme une dérivée généralisée que l'on notera v' sans ambiguïté maintenant que l'on sait que cette dérivée est unique.

Un lecteur plus averti saura immédiatement que le théorème de Lebesgue montre que si $w \in L^1(]0,1[)$ alors la fonction qui à x associe $\int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable presque partout et de dérivée presque partout égale à w ce qui donne une deuxième justication de la désignation de dérivée généralisée puisque en dimension 1, on sait, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'espace $L^2(]0,1[)$ est contenu dans $L^1(]0,1[)$.

On peut munir $H^1(]0,1[)$ de la norme $||v||_1$ définie par :

$$||v||_1^2 = ||v||^2_{L^2(]0,1[)} + ||v'||^2_{L^2(]0,1[)}$$

(3). Attention tout de même car l'égalité n'est vraie que presque partout...

Proposition I.5. *Muni de la norme* $||.||_1$*, l'espace* $H^1(]0,1[)$ *est un espace de Hilbert dans lequel l'espace* $C^1([0,1])$ *est dense.*

Admettons pour l'instant ce résultat dont la preuve utilisera les techniques ou les résultats ci-dessous et qui concernent la régularité classique des fonctions de $H^1(]0,1[)$.

Proposition I.6. *L'injection de l'espace* $H^1(]0,1[)$*, muni de la norme* $||.||_1$ *dans l'espace des fonctions h'oldériennes* $C^{0,\frac{1}{2}}(]0,1[)$ *est continue.*

"Rappel :" Si $0 < \alpha \leq 1$, l'espace $C^{0,\alpha}([0,1])$ est l'espace constitué des fonctions continues $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui satisfont la propriété suivante : il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tous $x, y \in [0,1]$:

$$|v(x) - v(y)| \leq C|x-y|^\alpha \ . \tag{6}$$

En d'autres termes, les fonction de $C^{0,\alpha}([0,1])$ sont celles qui ont un module de continuité $\omega_v(t)$ de la forme Ct^α.

On munit $C^{0,\alpha}([0,1])$ de la norme $||\cdot||_{0,\alpha}$ définie pour $v \in C^{0,\alpha}([0,1])$ par :

$$||v||_{0,\alpha} = ||v||_\infty + |v|_{0,\alpha} \ ,$$

où la semi-norme $|v|_{0,\alpha}$ est donnée par :

$$|v|_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} \ .$$

Une autre façon de voir cette semi-norme, c'est comme la plus petite des constantes C telle que la propriété (6) soit satisfaite.

Muni de cette norme, $C^{0,\alpha}([0,1])$ est un espace de Banach.

Exercice 3.
(i) Prouver que $||\cdot||_{0,\alpha}$ *est une norme et que, muni de cette norme,* $C^{0,\alpha}([0,1])$ *est un espace de Banach.*
(ii)Montrer que, si $(v_k)_k$ *est une suite bornée dans* $C^{0,\alpha}([0,1])$*, on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément (donc dans* $C([0,1])$*). Comment reformuler cette propriété ?*

Preuve : On veut estimer $v(x) - v(y)$. Par un simple calcul :

$$v(x) - v(y) = \int_x^y v'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{t \in]x,y[\}} v'(t)\ \mathrm{d}t \ .$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ qui donne :

$$|v(x)-v(y)| \leq \Big(\int \int_0^1 \mathbb{1}^2_{\{t\in]x,y[\}}\ \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}} ||v'||_{L^2(]0,1[)}$$

ou encore

$$|v(x) - v(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} ||v'||_{L^2(]0,1[)}. \tag{7}$$

Ceci montre qu'une fonction de $H^1(]0,1[)$ peut être vue comme une fonction de $C^{0,\frac{1}{2}}(]0,1[)$ et donc que l'injection est bien définie.

Montrons maintenant la continuité de l'injection (qui est évidemment une application linéaire) : la norme qui fait de $C^{0,\frac{1}{2}}(]0,1[)$ un espace de Banach est :

$$||v||_{0,\frac{1}{2}} = ||v||_\infty + |v|_{0,\frac{1}{2}}$$

où :

$$|v|_{0,\frac{1}{2}} = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous devons montrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que :

$$||v||_{0,\frac{1}{2}} \leq K ||v||_{H^1(]0,1[)} ,$$

pour tout $v \in H^1(]0,1[)$.

Nous remarquons d'abord que l'inégalité (7) peut être interprétée comme :

$$|v|_{0,\frac{1}{2}} \leq ||v'||_{L^2(]0,1[)} \leq ||v||_{H^1(]0,1[)} ,$$

et donc il ne nous reste plus qu'à estimer $||v||_\infty$ en fonction de $||v||_{H^1(]0,1[)}$.

Comme $v \in H^1(]0,1[)$, v s'écrit :

$$v(x) = \mu + \int_0^x v'(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{p.p. dans }]0,1[$$

et en combinant l'inégalité triangulaire avec les arguments développés plus haut, on voit que :

$$|v(x)| \leq |\mu| + |\int_0^x v'(t)\ \mathrm{d}t| \leq |\mu| + x^{1/2} ||v'||_{L^2(]0,1[)} ,$$

d'où :

$$||v||_\infty \leq |\mu| + ||v'||_{L^2(]0,1[)} \leq |\mu| + ||v||_{H^1(]0,1[)} ,$$

Il nous reste à estimer $|\mu|$ pour conclure. On écrit :

$$\mu = v(x) - \int_0^x v'(t)\ \mathrm{d}t ,$$

et on considère cette égalité comme une égalité de fonctions de $L^2(]0,1[)$, μ étant vu comme une fonction constante. Par l'inégalité triangulaire pour la norme L^2 :

$$|\mu| = ||\mu||_{L^2(]0,1[)} \leq ||v||_{L^2(]0,1[)} + ||\int_0^x v'(t)\ \mathrm{d}t||_{L^2(]0,1[)} .$$

Or, on a vu que $|\int_0^x v'(t)\ \mathrm{d}t| \leq x^{1/2}||v'||_{L^2(]0,1[)}$ et donc :

$$(8) \qquad || \int_0^x v'(t)\ \mathrm{d}t||_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{||v'||_{L^2(]0,1[)}}{\sqrt{2}}\ .$$

Finalement :

$$(9) \quad |\mu| = ||\mu||_{L^2(]0,1[)} \leq ||v||_{L^2(]0,1[)} + \frac{||v'||_{L^2(]0,1[)}}{\sqrt{2}} \leq \Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)||v||_{H^1(]0,1[)}$$

et :

$$||v||_\infty \leq \Big(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)||v||_{H^1(]0,1[)}\ .$$

En rassemblant toutes les informations obtenues sur $||v||_\infty$ et $|v|_{0,\frac{1}{2}}$, on conclut :

$$(10) \qquad ||v||_{0,\frac{1}{2}} \leq \Big(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)||v||_{H^1(]0,1[)}.$$

□

Revenons maintenant à la preuve de la Proposition I.5 :
Preuve : Tout d'abord, la norme définie sur $H^1(]0,1[)$ dérive clairement d'un produit scalaire lui-même construit sur le produit scalaire défini sur $L^2(]0,1[)$ que nous noterons $(\cdot,\cdot)_{L^2(]0,1[)}$:

$$||v||_1^2 = (v,v)_{H^1(]0,1[)} = (v,v)_{L^2(]0,1[)} + (v',v')_{L^2(]0,1[)}.$$

Ensuite, il nous faut montrer que $H^1(]0,1[)$ est complet pour cette norme (ce qui légitimera l'envie de prouver les injections). Considérons donc une suite de Cauchy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d' élements de $H^1(]0,1[)$. A chaque fonction v_n est associée le réel μ_n et la fonction $w_n = v_n'$. En regardant la preuve ci-dessus et l'inégalité (9), on voit que d'une part la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel μ. Par ailleurs, l'espace $H^1(]0,1[)$ s'injecte naturellement dans l'espace $L^2(]0,1[)$ de façon continue puisque :

$$||v||_{L^2(]0,1[)} \leq ||v||_1$$

et on a aussi :

$$||v'||_{L^2(]0,1[)} \leq ||v||_1$$

On a donc aussi que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une part et $(v_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$ donc elles convergent vers respectivement une fonction $v \in L^2(]0,1[)$ et $w \in L^2(]0,1[)$.

En utilisant (8), on voit que $\int_0^x v_n'(t)\ \mathrm{d}t$ converge vers $\int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t$ dans $L^2(]0,1[)$ et, quitte à extraire une sous-suite qui converge presque partout [à la fois pour v_n et $\int_0^x v_n'(t)\ \mathrm{d}t$], on peut passer à la limite dans l'égalité :

$$v_n(x) = \mu_n + \int_0^x v_n'(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{p.p.}$$

et obtenir :

$$v(x) = \mu + \int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{p.p.}$$

ce qui montre bien que $v \in H^1(]0,1[)$ et donc que $H^1(]0,1[)$ est complet.

Reste à prouver la densité de $C^1([0,1])$ dans $H^1(]0,1[)$, ce que nous ne ferons pas en détails ici (4). $\square$

Définition I.1. *On désigne par $H^1_0(]0,1[)$ le sous-espace fermé de $H^1(]0,1[)$ des fonctions qui s'annulent en $x=0$ et en $x=1$.*

Remarque : Il est d'abord important de remarquer que $H^1_0(]0,1[)$ est bien défini car les fonctions de $H^1(]0,1[)$ peuvent être vue comme des fonctions continues à cause de l'injection de $H^1(]0,1[)$ dans $C^{0,\frac{1}{2}}(]0,1[)$, ce qui donne un sens à leurs valeurs en 0 et 1 (alors que la définition initiale de $H^1(]0,1[)$ ne définissait les fonctions que presque partout...). Le fait que $H^1_0(]0,1[)$ soit fermé est un corollaire de la continuité de cette même injection.

Nous admettrons dans la suite le résultat suivant :

Théorème I.2. *L'espace $C^1_0([0,1])$ est dense dans $H^1_0(]0,1[)$ au sens de la norme $H^1(]0,1[)$.*

La preuve de ce résultat n'est pas si délicate : comme pour la densité de $C^1([0,1])$ dans $H^1(]0,1[)$ (preuve que nous n'avons pas faite non plus !), on doit tronquer et régulariser v' mais, ici, on a une contrainte supplémentaire du type $\int_0^1 v'(t)\ \mathrm{d}t = 0$ qu'il faut préserver et même étendre pour les régularisées à un intervalle du type $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pour $0 < \varepsilon \ll 1$. Sans être inatteignable, cette preuve nécessite un petit bagage technique...

Le résultat principal de cette section est le :

Théorème I.3. *Si u est la solution du problème (1) avec la condition de Dirichlet homogène (2), on a :*

$$J(u) = \min_{w \in H^1_0(]0,1[)} J(w).$$

De plus, toute suite minimisante d'éléments de $H^1_0(]0,1[)$ converge vers u qui est l'unique solution du problème de minimisation de la fonctionnelle J dans $H^1_0(]0,1[)$.

Preuve : La première propriété provient simplement de la densité de l'espace $C^1_0([0,1])$ dans $H^1_0(]0,1[)$ et de la continuité de J.

La deuxième partie nécessite le résultat suivant :

Lemme I.1. *(Inégalité de Poincaré) Pour tout élément $w \in H^1_0(]0,1[)$, on a :*

$$||w|||_{H^1(]0,1[)} \leq \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)||w'||_{L^2(]0,1[)}$$

(4). car c'est un excellent exercice pour le lecteur ! Indication : utiliser la méthode de troncature et régularisation sur v' et ajoutez une pincée de (8).

Une autre manière d'interpréter (ou même de formuler) ce résultat, c'est de dire que, sur $H^1_0(]0,1[)$, l'application $w \mapsto ||w'||_{L^2(]0,1[)}$ est une norme qui est équivalente à la norme $H^1(]0,1[)$, puisque on a clairement :

$$||w'||_{L^2(]0,1[)} \leq ||w||_{H^1(]0,1[)} \leq \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)||w'||_{L^2(]0,1[)}.$$

On notera $||w||_{H^1_0(]0,1[)} = ||w'||_{L^2(]0,1[)}$ et ce sera désormais la norme que nous utiliserons sur $H^1_0(]0,1[)$. Une dernière conséquence du lemme (ou plus exactement de sa preuve) est que l'on a aussi :

$$(11) \qquad ||w||_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||w||_{H^1_0(]0,1[)}.$$

Preuve du Lemme : Si $w \in H^1_0(]0,1[)$, puisque $w(0) = 0$, on a (pour tout $x \in [0,1]$ car w est continu) :

$$w(x) = \int_0^x w'(t)\ \mathrm{d}t$$

et donc, par Cauchy-Schwarz :

$$|w(x)| \leq x^{\frac{1}{2}}||w'||_{L^2(]0,1[)}\ .$$

On en déduit :

$$||w||_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||w||_{H^1_0(]0,1[)}.$$

Et le résultat du lemme est ainsi établi. □

Retour sur la preuve du Théorème : commençons par montrer que J est minorée sur $H^1_0(]0,1[)$:

$$J(w) = \frac{1}{2}||w||^2_{H^1_0(]0,1[)} - \int_0^1 f(t)w(t)\ \mathrm{d}t$$

D'où, par Cauchy-Schwarz :

$$J(w) \geq \frac{1}{2}||w||^2_{H^1_0(]0,1[)} - ||f||_{L^2(]0,1[)}||w||_{L^2(]0,1[)}$$

et en utilisant (11) :

$$J(w) \geq \frac{1}{2}||w||^2_{H^1_0(]0,1[)} - ||f||_{L^2(]0,1[)}\frac{||w||_{H^1_0(]0,1[)}}{\sqrt{2}}$$

Or $ab \leq \frac{\lambda a^2}{2} + \frac{1}{2\lambda}b^2$ pour tout $\lambda > 0$ donc :

$$J(w) \geq \frac{1}{2}(1-\lambda)||w||^2_{H^1_0(]0,1[)} - \frac{1}{4\lambda}||f||_{L^2(]0,1[)}.$$

En choisissant $\lambda = 1$, on a la minoration souhaitée.

Soit maintenant $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite minimisante pour J. En utilisant l'inégalité précédente avec $\lambda = \frac{1}{2}$, on voit que $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $H_0^1(]0,1[)$ qui est un espace de Hilbert. Donc il existe une sous-suite $(w'_\varepsilon)_{\varepsilon'}$ qui converge faiblement dans $H_0^1(]0,1[)$ vers w_∞. Comme J est convexe et continue, elle est sci pour la topologie faible de $H_0^1(]0,1[)$ et donc :

$$J(w_\infty) \leq \underline{\lim} J(w_{\varepsilon'}) = \min_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v).$$

Il en résulte que w_∞ est une solution du problème d'optimisation.

Lemme I.2. *La fonction J est strictement convexe. Plus précisément, pour tout couple $(w_1, w_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$ et tout réel $\alpha \in [0,1]$, on a :*

$$J\big(\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2\big) - \alpha J\big(w_1\big) - \big(1-\alpha\big) J\big(w_2\big) = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} ||w_1 - w_2||^2_{H_0^1(]0,1[)}$$

Le lemme résulte d'un simple calcul et du caractère quadratique de J.

Comme conséquence si w_1 et w_2 sont deux solutions distinctes du problème d'optimisation et si on pose $m = \min\limits_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v)$ et en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$J\Big(\frac{w_1 + w_2}{2}\Big) - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} < 0$$

ou encore

$$J\Big(\frac{w_1 + w_2}{2}\Big) < m = \min_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v)$$

D'où la contradiction.
Donc le problème d'optimisation a une solution unique que l'on note u, et comme toutes les sous-suites faiblement convergentes de la suite minimisante convergent vers u, un argument de compacité classique montre que toute le suite $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u.

Enfin, en examinant la preuve ci-dessus, on remarque que :

$$J(u) \leq \underline{\lim} J(w_\varepsilon) \leq \overline{\lim} J(w_\varepsilon) = \min_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v) = J(u) \ ,$$

et donc $J(w_\varepsilon) \to J(u)$. Mais, comme pour tout $w \in H_0^1(]0,1[)$:

$$J(w) = \frac{1}{2} ||w||^2_{H_0^1(]0,1[)} - \int_0^1 f(t) w(t) \, \mathrm{d}t \ ,$$

et que $w \mapsto \int_0^1 f(t) w(t) \, \mathrm{d}t$ est une forme linéaire continue, la convergence faible de w_ε vers u combinée à la convergence de $J(w_\varepsilon)$ vers $J(u)$ implique celle de $||w_\varepsilon||^2_{H_0^1(]0,1[)}$ vers $||u||^2_{H_0^1(]0,1[)}$. Convergence faible + convergence en norme implique convergence forte, ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

Exercice 4. *On considère le problème de Dirichlet :*

$$\textit{(P)} \qquad \begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f \quad \textit{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où $a, b, c,\ f \in C([0,1])$ *et le problème variationnel :*

$$\textit{(P')} \qquad \begin{cases} \textit{Trouver } \tilde{u} \in H^1_0(]0,1[) \textit{ tel que}: \\ J(\tilde{u}) = \min_{v \in H^1_0(]0,1[)} J(v), \end{cases}$$

avec :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha(t)[v'(t)]^2 + 2\beta(t)v'(t)v(t) + \gamma(t)[v(t)]^2\right] dt - \int_0^1 f(t)v(t)dt\ ,$$

où α, β *et* γ *sont des fonctions continues (ou plus régulières si nécessaire) avec* $\alpha(t) \geq \delta > 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

1. À quelle condition liant α, β, γ *et* a, b, c, *peut-on penser FORMELLEMENT que les deux problèmes sont équivalents, c'est-à-dire que les solutions de (P) et de (P') sont les mêmes.*
2. Trouver une condition "naturelle" sur α, β, γ *pour que* J *soit coercive.*
3. Prouver que, sous cette même condition, J *est aussi strictement convexe et* C^1.
4. En déduire que (P') admet une unique solution $\tilde{u} \in H^1_0(]0,1[)$.
5. Trouver, de même, une condition pour que l'équation satisfasse le principe du maximum (on pourra songer à un changement de variable du type $v(x) = u(x)\exp(Kx)$ *ou bien* $v(x) = u(x)\sin(k_1x+k_2)$ *pour des constantes* K, k_1, k_2 *bien choisie).*

Exercice 5.
1. Prouver le Théorème I.2.
2. Démontrer l'inégalité de Hardy : si $u \in H^1_0(]0,1[)$,

$$||\frac{u(x)}{x}||_{L^2(]0,1[)} \leq c||u'||_{L^2(]0,1[)}\ ,$$

pour une certaine constante c *à déterminer.*

Exercice 6. *(Exercice récapitulatif pour ceux qui se sentent bien musclés !)*
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞ *qui satisfait :*

$$0 < \alpha \leq h''(t) \leq \beta \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}\ ,$$

pour certaines constantes α *et* β. *On admettra qu'on a alors :*

$$C_1t^2 - D_1 \leq h(t) \leq C_2t^2 + D_2 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}\ ,$$

pour certaines constantes strictement positives C_1, C_2, D_1, D_2.

On considère le problème variationnel :

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que :} \\ J(u) = \min\limits_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v), \end{cases}$$

avec :

$$J(v) = \int_0^1 h(v'(t))dt + \frac{1}{2}\int_0^1 [v(t)]^2 dt - \int_0^1 f(t)v(t)dt \ ,$$

avec $f \in C([0,1])$.

1. Prouver que le problème (P) admet au moins une solution $u \in H_0^1(]0,1[)$ *qui satisfait :*

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \qquad \int_0^1 h'(u'(t))v'(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt \ .$$

2. Pour $x \in [0,1]$, *on pose :*

$$w(x) = h'(u'(x)) - \int_0^x u(t)dt + \int_0^x f(t)dt \ .$$

Rappeler pourquoi u *est une fonction continue et montrer que :*

$$\text{pour tout } v \in C_0^1([0,1]), \quad \int_0^1 w(t)v'(t)dt = 0 \ . \tag{12}$$

3. En déduire que la fonction w *est constante sur* $[0,1]$. *(On pourra poser* $\bar{w} = \int_0^1 w(t)dt$ *et prouver que* $w - \bar{w}$ *satisfait également (12).*

*(***NB :** *Courtesy of Du Bois-Raymond!)*

4. Démontrer, en utilisant la question 3, *que* $u \in C^1([0,1])$ *puis que* $u \in C^2([0,1])$. *(On pourra remarquer que* h' *est une fonction strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.*)*

5. Prouver que u *est solution du problème de Dirichlet :*

$$(P') \qquad \begin{cases} -h''(u')u'' + u = f \quad \textit{dans}\,]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

6. Démontrer que le problème (P') admet une unique solution dans $C^2([0,1])$ *et en déduire que le problème (P) admet aussi une unique solution.*

7. Prouver que :

$$||u||_{L^\infty]0,1[} \leq ||f||_{L^\infty]0,1[} \ .$$

et que $u \in C^4([0,1])$ *si* $f \in C^2([0,1])$.

5 D'autres espaces de Sobolev et retour à l'équation linéaire

Il est à noter que l'approche variationnelle ne nécessite pas la continuité de f. En fait, dans ce cadre, l'hypothèse naturelle serait $f \in L^2(]0,1[)$. On peut alors se demander comment résoudre l'équation si f est dans $L^2(]0,1[)$ ou plus généralement $L^p(]0,1[)$, pour $p > 1$ et quelle est la régularité des solutions.

Pour cela, on introduit les espaces $W^{1,p}(]0,1[)$ définis comme suit : l'espace $W^{1,p}(]0,1[)$ est constitué des fonctions v de $L^p(]0,1[)$ pour lesquelles il existe un nombre réel μ et une fonction w de $L^p(]0,1[)$ tels que :

$$v(x) = \mu + \int_0^x w(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{p.p. dans }]0,1[\ .$$

L'analogie avec $H^1(]0,1[)$ est claire, L^2 étant remplacé par L^p. On notera de même v' la fonction w et muni de la norme :

$$||v||_{1,p} = ||v||_{L^p} + ||v'||_{L^p}\ ,$$

est un espace de Banach qui s'injecte de manière compacte dans $C([0,1])$ (exercice !).

Nous allons maintenant aller un peu plus loin en définissant l'espace $W^{2,p}(]0,1[)$ constitué des fonctions v de $W^{1,p}(]0,1[)$ telles que v' est aussi dans $W^{1,p}(]0,1[)$. L'espace $W^{2,p}(]0,1[)$ est aussi un espace de Banach muni de la norme :

$$||v||_{2,p} = ||v||_{L^p} + ||v'||_{L^p} + ||v''||_{L^p}\ ,$$

où, par définition, $v'' = (v')'$ (puisque v' est dans $W^{1,p}(]0,1[)$). Cette définition s'applique en particulier dans le cas $p = 2$ et on note $H^2(]0,1[) = W^{2,p}(]0,1[)$.

On a le :

Théorème I.4. *On suppose que* $|\lambda| \leq \Lambda$. *Pour toute fonction* $f \in L^p([0,1])$, *il existe une unique solution* $u \in W^{2,p}(]0,1[) \cap W_0^{1,p}(]0,1[)$ *du problème de Dirichlet homogène (1)-(2), où* $W_0^{1,p}(]0,1[)$ *est l'espace des fonctions de* $W^{1,p}(]0,1[)$ *qui s'annule en* 0 *et en* 1. *De plus,* u *est lipschitzienne donc continue sur* $[0,1]$ *et il existe une constante* $K(\Lambda,p)$ *telle que, pour tous* $x,y \in [0,1]$ *:*

$$||u||_\infty \leq K(\Lambda,p)||f||_{L^p}\ ,\ |u(x)-u(y)| \leq K(\Lambda,p)||f||_{L^p}|x-y|\ ,$$

et :

$$||u||_{2,p} \leq K(\Lambda,p)||f||_{L^p}\ .$$

Il est à noter que cette dernière propriété implique que u' est Höldérienne et donc on a un peu mieux que la propriété précédente.

Preuve : Dans cet énoncé, la seule vrai difficulté est l'unicité. En effet :
(i) D'abord, si f est continue, les estimations ci-dessus s'obtiennent soit en utilisant la formule avec le noyau K, soit en utilisant l'équation (pour la norme $W^{2,p}$).
(ii) L'existence s'obtient en approchant f par une suite de fonctions continues $(f_k)_k$: les solutions u_k satisfont des estimations uniformes et via le Théorème d'Ascoli, on voit facilement qu'on peut construire des sous-suites qui convergent uniformément. Par l'équation, on a alors convergence des dérivées secondes dans L^p et on peut passer à la limite dans L^p.
(iii) Pour l'unicité, on a besoin que $C_c^\infty(]0,1[)$ soit dense dans $W^{2,p}(]0,1[) \cap W_0^{1,p}(]0,1[)$. Si ce point est acquis (exo !), on considère deux solutions $u, v \in W^{2,p}(]0,1[) \cap W_0^{1,p}(]0,1[)$ du problème et on note $w = u - v$ qui est solution du problème avec $f = 0$. Soit $(\phi_k)_k$ une suite de fonctions de $C_c^\infty(]0,1[)$ qui converge vers w dans $W_0^{1,p}(]0,1[)$: on multiplie l'équation par ϕ_k et on intègre de 0 à 1 (ou bien on la regarde au sens des distributions) ce qui conduit, après une intégration par parties (ou en utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions) à :

$$\int_0^1 w'(x)\phi_k'(x)dx + \int_0^1 \lambda^2 w(x)\phi_k(x)dx = 0 \; .$$

La convergence de la suite $(\phi_k)_k$ dans $W^{2,p}(]0,1[) \cap W_0^{1,p}(]0,1[)$ implique une convergence dans C^1, i.e. une convergence uniforme de ϕ_k et ϕ_k' vers w et w', ce qui donne :

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx + \int_0^1 \lambda^2 (w(x))^2 dx = 0 \; ,$$

et donc $w = 0$.$\square$

6 Espaces de Sobolev et Principe du Maximum

On commence par le résultat suivant où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A :

Théorème I.5. (Théorème de Stampacchia) *Si* $u \in H_0^1(]0,1[)$ *alors* $u^+ := \max(u, 0) \in H_0^1(]0,1[)$ *et :*

$$(u^+)'(x) = \mathbb{1}_{\{u>0\}} u'(x) = \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}} u'(x) \; .$$

En particulier, $u' = 0$ *p.p. sur l'ensemble* $\{u = 0\}$*.*

Preuve : On commence par le cas où u est de classe C^1. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $\varphi(0) = 0$ alors $\varphi(u)$ est toujours de classe C^1 et dans $H_0^1(]0,1[)$.

L'idée est de construire une suite $(\varphi_k)_k$ telle que $(\varphi_k(u))_k$ converge vers u^+ dans $H^1(]0,1[)$.

Le plus simple est de construire φ_k' :

$$\varphi_k'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\frac{1}{k} \\ k(t+\frac{1}{k}) & \text{si } -\frac{1}{k} \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

car on voit bien que $0 \leq \varphi_k'(t) \leq 1$ approche la fonction qui vaut 0 sur $(-\infty, 0)$ et 1 sur $(0, +\infty)$ qui est la dérivée de $t \mapsto t^+$. On intègre ensuite cette dérivée en imposant $\varphi_k(0) = 0$.

Il est d'abord clair que $\varphi_k(u)$ converge uniformément sur $[0,1]$ (on rappelle que u est continue et même 1/2-höldérienne). Puis on remarque que :

$$||\varphi_k'(u)u'||_{L^2} \leq ||u'||_{L^2} \ ,$$

et enfin on écrit :

$$\varphi_k(u)(x) = \int_0^x \varphi_k'(u)u'(t)dt \ . \tag{13}$$

Des deux dernières propriétés, on déduit d'abord qu'on peut extraire une sous-suite de la suite $\varphi_k'(u)u'$ qui converge faiblement dans L^2 vers une fonction g puis que :

$$u^+(x) = \int_0^x g(t)dt \ .$$

On a donc $u^+ \in H_0^1(]0,1[)$.

De plus, $\mathbb{1}_{\{u>0\}}(t)\varphi_k'(u)u'(t) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}(t)u'(t)$ et par passage à la limite faible, on a : $\mathbb{1}_{\{u>0\}}(t)g(t) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}(t)u'(t)$. De même avec $\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}(t)$. D'autre part, en changeant l'approximation de u^+ par $\varphi_k(u-\frac{1}{k})$ et en se souvenant que g est unique, on utilise le fait que $\mathbb{1}_{\{u<0\}}(t)\varphi_k'(u-\frac{1}{k})u'(t) = \mathbb{1}_{\{u\leq 0\}}(t)\varphi_k'(u-\frac{1}{k})u'(t) = 0$ implique $\mathbb{1}_{\{u<0\}}(t)g(t) = \mathbb{1}_{\{u\leq 0\}}(t)g(t) = 0$. On a donc :

$$g(t) = (\mathbb{1}_{\{u>0\}}(t) + \mathbb{1}_{\{u\leq 0\}}(t))g(t) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}(t)g(t) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}(t)u'(t).$$

et de même on obtient $g(t) = \mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}(t)u'(t)$ en intervertissant les inégalités larges et strictes. Et le résultat est prouvé dans le cas C^1.

Pour le cas général, on approche $u \in H_0^1(]0,1[)$ par une suite de fonctions de C_0^1 pour obtenir l'égalité (13) puis on suit la même preuve.$\square$

Grâce à ce théorème, on a une version plus faible du Principe du Maximum.

Théorème I.6. *Soit $f \in L^2([0,1])$ et soit $u \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$, l'unique solution du problème de Dirichlet homogène (1)-(2).*

(i) Si $f \leq 0$ p.p. alors ≤ 0 sur $[0,1]$.
(ii) Si $f \in L^\infty([0,1])$ alors :

$$||u||_\infty \leq \frac{1}{\lambda^2}||f||_\infty \ .$$

Preuve : Pour (i), on multiplie l'équation par u^+, on intègre sur $[0,1]$ et via une intégration par partie sur le premier terme, on aboutit à :

$$\int_0^1 u'(t)(u^+)'(t)dt + \lambda^2 \int_0^1 u(t)u^+(t)dt = \int_0^1 f(t)u^+(t)dt \ .$$

On examine les trois termes. Par le théorème de Stampacchia :

$$\int_0^1 u'(t)(u^+)'(t)dt = \int_0^1 1\!\!1_{\{u>0\}}(t)[u'(t)]^2 dt \geq 0 \ .$$

Ensuite :

$$\int_0^1 u(t)u^+(t)dt = \int_0^1 [u^+(t)]^2 dt \ ,$$

et :

$$\int_0^1 f(t)u^+(t)dt \leq 0 \ .$$

Il en découle :

$$\lambda^2 \int_0^1 [u^+(t)]^2 dt \leq 0 \ ,$$

et donc $u^+ = 0$ sur $[0,1]$, i.e. $u \leq 0$.

Pour (ii), on remarque que, si $M > 0$ alors $(u-M)^+ \in H_0^1(]0,1[)$. On procède comme ci-dessus en multipliant l'équation par $v = (u-M)^+$ avec $M = \frac{1}{\lambda^2}||f||_\infty$.

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)dt + \lambda^2 \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt \ .$$

Puis on remarque que :

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)dt = \int_0^1 1\!\!1_{\{u>M\}}(t)[u'(t)]^2 dt \geq 0 \ .$$

Ensuite :

$$\int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 (u(t)-M)v(t)dt + \int_0^1 Mv(t)dt = \int_0^1 [v(t)]^2 dt + \int_0^1 Mv(t)dt \ ,$$

et donc

$$\int_0^1 [v(t)]^2 dt + \lambda^2 \int_0^1 Mv(t)dt \leq \int_0^1 f(t)v(t)dt \ ,$$

que l'on peut réécrire :

$$\int_0^1 [v(t)]^2 dt \leq \int_0^1 [f(t) - \lambda^2 M] v(t) dt \leq 0 \ .$$

Donc $v = 0$ sur $[0,1]$, i.e $u \leq M$. On obtient l'autre inégalité en changeant u en $-u$ et f en $-f$.□

Deuxième partie

Équations elliptiques non linéaires

On se concentrera sur l'équation :

$$-u'' + H(x, u') + \lambda^2 u = f(x) \quad \text{dans } (0,1) \ , \tag{14}$$

associée à la condition de Dirichlet homogène (2). On supposera que $H : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait $H(x,0) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ (condition non restrictive car il suffit de considérer $H(x,p) - H(x,0)$ et de changer f) et qu'il existe une constante K telle que, pour tous $p, q \in \mathbb{R}$:

$$|H(x,p) - H(x,q)| \leq K|p - q| \ .$$

Quand à la fonction f, elle sera ou bien continue ou dans un espace L^p.

Le premier résultat d'existence et d'unicité est le théorème suivant :

Théorème II.1. *Pour tout $f \in L^2((0,1))$, il existe une unique solution du problème (14)-(2). De plus cette solution est dans $H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$.*

Preuve : Nous allons faire la preuve en deux temps : d'abord dans le cas où λ^2 est "grand". Puis dans le cas général.

Cas où λ^2 est "grand" :

On introduit l'application $T : H_0^1(]0,1[) \to H_0^1(]0,1[)$ qui, à $v \in H_0^1(]0,1[)$, associé l'unique solution $u \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$ de l'équation :

$$-u'' + \lambda^2 u = f(x) - H(x, v') \quad \text{dans } (0,1) \ .$$

L'idée est de montrer que cette application est contractante si λ^2 est "assez grand".

Pour cela, on considère $v_1, v_2 \in H_0^1(]0,1[)$ et $u_1 = T(v_1), u_2 = T(v_2)$. Si $w = u_1 - u_2$, on a :

$$-w'' + \lambda^2 w = H(x, v_2') - H(x, v_1') \quad \text{dans } (0,1) \ .$$

On multiplie par w et on intègre sur $[0,1]$. Via une intégration par partie désormais classique et l'utilisation de l'hypothèse de Lipschitz sur H, on a :

$$\int_0^1 [w'(t)]^2 dt + \lambda^2 \int_0^1 [w(t)]^2 dt \leq \int_0^1 K|(v_1' - v_2')(t)|.|w(t)| dt \ .$$

Par une inégalité élémentaire :

$$K|(v_1' - v_2')(t)|.|w(t)| \leq \frac{K^2}{2\lambda^2}|(v_1' - v_2')(t)|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2[w(t)]^2 \; .$$

Il en résulte que, si $\lambda^2 \geq K^2$ alors :

$$||u_1 - u_2||^2_{H^1_0} \leq \frac{1}{2}||v_1 - v_2||^2_{H^1_0} \; ,$$

et on peut appliquer le Théorème du Point Fixe pour les applications contractantes qui donne l'existence et l'unicité de la solution.

Cas où λ^2 N' est PAS "grand" :
On introduit un paramètre $\mu > 0$ grand et on considère le problème :

$$-u'' + H(x, u') + (\lambda^2 + \mu)u = f(x) + \mu v \quad \text{dans } (0,1) \; ,$$

Ici on va raisonner dans $C([0,1])$ en considérant l'application $\Psi : C([0,1]) \to C([0,1])$ qui à $v \in C([0,1])$ associe u. La solution u étant dans $H^1_0(]0,1[)$, elle est continue donc Ψ est bien définie.

Pour montrer que Ψ est contractante, on reprend les calculs de la preuve du Principe du Maximum dans $H^1_0(]0,1[)$. Si $v_1, v_2 \in C([0,1])$ et $u_1 = \Psi(v_1), u_2 = \Psi(v_2)$, on note $w = u_1 - u_2$. La fonction w satisfait :

$$-w'' + [H(x, u_1') - H(x, u_2')] + (\lambda^2 + \mu)w = \mu(v_1 - v_2) \quad \text{dans } (0,1) \; ,$$

En multipliant par $(w - M)^+$, en utilisant l'hypothèse de Lipschitz sur H et en intégrant de 0 à 1, on arrive après des manipulations identiques à celles de la preuve du Principe du Maximum dans $H^1_0(]0,1[)$:

$$\int_0^1 [w'(t)]^2 dt + (\lambda^2 + \mu)\int_0^1 [w(t)]^2 dt - \int_0^1 K|w'(t)|w(t)dt$$
$$\leq \int_0^1 [\mu|(v_1 - v_2)(t)| - (\lambda^2 + \mu)M).w(t)dt \; .$$

On conclut alors de la manière suivante : dans le membre de gauche, on écrit :

$$K|w'(t)|w(t) \leq \frac{1}{2}|w'(t)|^2 + \frac{1}{2}K^2[w(t)]^2 \; ,$$

et si μ est choisit tel que $\lambda^2 + \mu \geq K^2$, le membre de gauche est plus grand que $\frac{1}{2}\int_0^1 [w'(t)]^2 dt$.

Pour le membre de droite, on choisit $M = \frac{\mu}{\lambda^2+\mu}||v_1 - v_2||_\infty$ et le second membre est négatif. On en déduit que :

$$u_1 - u_2 \leq \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu}||v_1 - v_2||_\infty \; ,$$

puis que :

$$||u_1 - u_2||_\infty \leq \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu} ||v_1 - v_2||_\infty \ ,$$

en échangeant les rôle de u_1 et u_2. On a donc la contraction dans $C([0,1])$ et le théorème est prouvé.$\Box$

Exercice 7. *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que, pour toute fonction $u \in C^2([0,1])$:*

$$||u'||_\infty \leq \varepsilon ||u''||_\infty + C(\varepsilon)||u||_\infty \ .$$

En déduire une preuve analogue à celle du Théorème II.1 si $f \in C([0,1])$ dans les espaces de type $C([0,1]) - C^1([0,1]) - C^2([0,1])$.

7 Back to the Maximum Principle

Le but de cette section est de montrer que les résultats des Théorème I.1 et I.6 s'étendent au cas non linéaire.

Théorème II.2. *Soient u et v deux fonctions de $C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ satisfaisant :*

1. $-u'' + H(x,u') + \lambda^2 u \leq f$ *sur* $(0,1)$
2. $-v'' + H(x,v') + \lambda^2 v \geq g$ *sur* $(0,1)$
3. $u(0) \leq v(0)$ *et* $u(1) \leq v(1)$.

Alors, si les seconds membres $f, g \in C([0,1])$ satisfont $f \leq g$ sur $[0,1]$, on a $u \leq v$ sur $[0,1]$. De plus si u est une solution de (14)-(2), on a :

$$||u||_\infty \leq \frac{1}{\lambda^2}||f||_\infty \ .$$

Le résultat reste vrai si $u, v \in W^{2,p}(]0,1[) \cap W^{1,p}(]0,1[)$ avec $f, g \in L^p(]0,1[)$ ($p > 1$).

Preuve : Le cas $C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ est laissé en exercice car il est vraiment sans difficulté. Pour le cas $W^{2,p}(]0,1[) \cap W_0^{1,p}(]0,1[)$, on soustrait les deux inégalités et on multiplie par $w := [(u-v)^+]^n$ pour n assez grand (NB : bien vérifier que $w \in W_0^{1,p}(]0,1[)$) puis on suit les calculs déjà fait dans le Théorème II.1.$\Box$

Il est à noter que l'on a vraiment besoin de l'hypothèse de Lipschitz sur H dans le cas $W^{2,p}(]0,1[) \cap W^{1,p}(]0,1[)$ mais pas dans le cas $C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$. Ce qui nous conduit à la section suivante.

8 Et si H ne satisfait pas l'hypothèse de Lipschitz ?

On remplace ici l'hypothèse de Lipschitz sur H par une simple hypothèse de croissance à l'infini pour H (en p) : H est continue, $H(x,0) = 0$ et il existe une constante K telle que, pour tous $x \in [0,1]$ et $p \in \mathbb{R}$:

$$|H(x,p)| \leq K|p| \ .$$

Théorème II.3. *Pour tout $f \in C([0,1])$, il existe une unique solution $u \in C^2([0,1]) \cap C([0,1])$ du problème (14)-(2).*

La preuve repose sur le Théorème du Point Fixe de Leray-Schauder que nous admettons :

Théorème II.4. *Soient E un espace de Banach et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de E. Si T est une application continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ telle que $T(\mathcal{C})$ soit relativement compact, alors T a un point fixe.*

Preuve : On suppose d'abord que H est uniformément borné en x et p, ce que l'on peut obtenir en tronquant H. On considère l'application $T : C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$ qui, à $v \in C^1([0,1])$, associe $u = T(v)$ l'unique solution de :

$$-u'' + \lambda^2 u = f(x) - H(x,v') \quad \text{dans } (0,1) \ ,$$

associée à la condition de Dirichlet (2). Par les résultats du cas linéaire, si $\lambda \in [0,\Lambda]$, on a :

$$||u||_{C^1} = ||u||_\infty + ||u'||_\infty \leq 2C(\Lambda)||f(x) - H(x,v')||_\infty \leq 2C(\Lambda)(||f||_\infty + ||H||_\infty) \ .$$

Si on considère le convexe fermé de C^1 :

$$\mathcal{C} := \{v \in C^1([0,1]) \ ; \ ||v||_{C^2} \leq 2C(\Lambda)(||f||_\infty + ||H||_\infty)\} \ ,$$

alors $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. De plus, par l'équation :

$$||u''||_\infty \leq \lambda^2 ||u||_\infty + C(\Lambda)||f(x) - H(x,v')||_\infty \leq (\Lambda^2+1)C(\Lambda)(||f||_\infty + ||H||_\infty) \ .$$

Donc $||Tv||_{C^2} \leq (\Lambda^2+3)C(\Lambda)(||f||_\infty + ||H||_\infty)$, $T(\mathcal{C})$ est relativement compact par le Théorème d'Ascoli. Le Théorème de Leray-Schauder implique donc l'existence d'un point fixe qui est une solution du problème (14)-(2).

Quand H n'est pas borné, on remarque que les solutions du problème (14)-(2) satisfont :

$$||u''||_\infty \leq (\Lambda^2+1)C(\Lambda)||f(x) - H(x,u')||_\infty \leq (\Lambda^2+1)C(\Lambda)(||f||_\infty + K||u'||_\infty) \ .$$

L'exercice 7 montre alors que :

$$\begin{aligned} ||u'||_\infty &\leq \varepsilon ||u''||_\infty + C(\varepsilon)||u||_\infty \ , \\ &\leq \varepsilon(\Lambda^2+1)C(\Lambda)(||f||_\infty + K||u'||_\infty) + C(\varepsilon)||u||_\infty \ . \end{aligned}$$

Comme, d'autre part :

$$||u||_\infty \le \frac{1}{\lambda^2}||f||_\infty \ ,$$

on en déduit :

$$(1-(\Lambda^2+1)C(\Lambda)K\varepsilon)||u'||_\infty \le \varepsilon(\Lambda^2+1)C(\Lambda)||f||_\infty + C(\varepsilon)\frac{1}{\lambda^2}||f||_\infty \ .$$

En choisissant ε assez petit (par exemple tel que $1-(\Lambda^2+1)C(\Lambda)K\varepsilon = 1/2$), on a une estimation uniforme de la norme de la dérivée première. Liée à l'estimation uniforme de $||u||_\infty$ et l'estimation ci-dessus de $||u''||_\infty$, la norme C^2 de u est contrôlée.

Pour obtenir le résultat d'existence, il suffit alors de tronquer H : si $(H_R)_R$ est une suite de nonlinéarités bornées, typiquement :

$$H_R(x,p) = \min(R, \max(H(x,p), -R)) \ ,$$

on a des solutions u_R associées à chaque H_R, leurs normes C^2 sont uniformément bornées (car les H_R satisfont l'hypothèse de croissance avec un K uniforme) et on utilise le Théorème d'Ascoli pour extraire une sous-suite convergente dans C^1 : l'équation montre que u_R'' converge aussi uniformément et la limite est la solution cherchée du problème (14)-(2) qui est unique par le Principe du Maximum.□

Exercice 8. *Formuler et démontrer un résultat analogue si $f \in L^p(]0,1[)$ en cherchant des solutions dans $W^{2,p}(]0,1[) \cap W_0^{1,p}(]0,1[)$.*

Troisième partie

Annexes : Rappels d'Analyse Hilbertienne

On note H un espace de Hilbert, $(\cdot,\cdot)$ son produit scalaire et $||\cdot||$ la norme associée. On rappelle la propriété caractéristique de la norme, *l'égalité de la médiane* :

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right) \quad \text{pour tous } x, y \in H \ .$$

Le résultat fondamental est le suivant :

Théorème III.1. *(Théorème de projection) Soit K un sous-ensemble convexe fermé, non vide de H et soit $x \in H$. Il existe un unique point $y \in K$ tel que :*

$$||x-y|| = \min_{z \in K} ||x-z|| \ .$$

De plus, y est l'unique solution dans K de l'inéquation variationnelle :

$$(x-y, z-y) \le 0 \quad \textit{pour tout } z \in K \ .$$

Preuve : $\{||x-z||;\ z \in K\}$ est un ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$, il admet donc une borne inférieure $m = \inf_{z\in K} ||x-z||$ et par définition de la borne inférieure, il existe une suite minimisante $(z_n)_n$ d'éléments de K, c'est-à-dire telle que $||x-z_n|| \to m$.

En appliquant l'égalité de la médiane à "x"$= x - z_n$ et "y"$= x - z_p$ pour $n, p \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$||x_n - x_p||^2 = 2\left(||x-z_n||^2 + ||x-z_p||^2\right) - ||2x - z_n - z_p||^2 \ .$$

Mais :

$$||2x - z_n - z_p||^2 = 4\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\|^2 \ ,$$

et, comme K est convexe, $\frac{z_n+z_p}{2} \in K$ donc $||x - \frac{z_n+z_p}{2}|| \geq m$. Il en résulte :

$$||x_n - x_p||^2 \leq 2\left(||x-z_n||^2 + ||x-z_p||^2\right) - 4m^2; .$$

En utilisant le fait que $||x-z_n||^2, ||x-z_p||^2 \to m^2$, on déduit de cette inégalité que la suite $(z_n)_n$ est de Cauchy donc elle converge vers un élément y qui est dans K car les z_n sont dans K et K est fermé. Par passage à la limite, en utilisant la continuité de la norme, on obtient $||x-y|| = m$ puisque $||x-z_n||$ converge à la fois vers m (par définition) et vers $||x-y||$ (par continuité de la norme). Une superbe application de l'unicité de la limite !

Pour l'unicité, on raisonne par l'absurde : s'il existe $y, y' \in K$ tels que $||x-y|| = ||x-y'|| = m$, on réutilise l'égalité de la médiane avec "x"$= x-y$ et "y"$= x-y'$; par le même argument que ci-dessus, on déduit :

$$||y-y'||^2 \leq 2\left(||x-y||^2 + ||x-y'||^2\right) - 4m^2 = 0 \ .$$

D'où l'unicité.

Pour l'inéquation variationnelle, on "teste" l'inégalité $||x-y||^2 \leq ||x-z||^2$ pour tout $z \in K$, en chageant z en $tz + (1-t)y$ pour $t \in]0,1[$. Cette combinaison convexe reste dans K puisque $y, z \in K$ et, en écrivant :

$$||x-(tz+(1-t)y)||^2 = ||x-y+t(z-y)||^2 = ||x-y||^2 + 2t(x-y, z-y) + t^2||z-y||^2 \ ,$$

on déduit :

$$2t(x-y, z-y) + t^2||z-y||^2 \geq 0 \ .$$

Il suffit de diviser par $t > 0$ et de faire tendre t vers 0 pour obtenir l'inéquation variationnelle.

Enfin, pour montrer que y est l'unique solution de cette inéquation variationnelle (I.V.), on procède par l'absurde en considérant un autre élément y' de K qui la satisfait. En prenant $z = y'$ dans l'I.V. de y et $z = y$ dans celle de y' et en les sommant, on a :

$$(x-y, y'-y) + (x-y', y-y') \geq 0 \ .$$

Mais le membre de gauche vaut $-||y-y'||^2$. Contradiction. $\square$

Remarque : Si F est un sous-espace fermé de H, on peut projeter sur F et si on note $y = p_F(x)$, on montre facilement que p_F est linéaire, continue et que $||p_F(x_1)-p_F(x_2)|| \leq ||x_1-x_2||$, pour tous $x_1, x_2 \in H$, cette dernière inégalité étant aussi vraie quand on projète sur un convexe feermé quelconque.

Théorème III.2. *(Théorème de représentation de Riesz) Si L est une forme linéaire continue sur H, il existe un unique élément $a \in H$ tel que :*

$$L(x) = (a, x) \quad \textit{pour tout } x \in H\ .$$

Preuve : On note $F = ker(L)$. F est un sous-espace fermé car L est continu. Si L n'est pas identiquement nul (sinon $a = 0$ convient), il existe $x \in H$ tel que $L(x) \neq 0$. On note y la projection de x sur F. L'inéquation variationnelle implique que :

$$(x-y, z-y) \geq 0 \quad \text{pour tout } z \in F\ ,$$

mais F étant un sous-espace vectoriel, on peut prendre $z = y+h$, h décrivant F puis on peut changer h en $-h$. On aboutit donc à la relation d'orthogonalité :

$$(x-y, h) \geq 0 \quad \text{pour tout } h \in F\ .$$

On note $b = x - y$; comme $L(b) = L(x) \neq 0$, $b \neq 0$ et on va maintenant prouver le :

Lemme III.1. *$H = F \bigoplus \mathbb{R}b$.*

Preuve : Si $z \in H$, un calcul immédiat montre que $z - \frac{L(z)}{L(b)}b$ est dans F et donc $z = \frac{L(z)}{L(b)}b + \bar{z}$ avec $\bar{z} \in F$ et cette décomposition est unique car le coefficient de b est imposé par le calcul de $L(z)$. $\square$

On pose alors $a = \frac{L(x)}{||b||^2}b$ et on utilise la décomposition d'un z quelconque de H comme ci-dessus. Comme $(a, \bar{z}) = 0$ puisque $\bar{z} \in F$ et donc $(b, \bar{z}) = 0$, on déduit :

$$(a, z) = \frac{L(z)}{L(b)}(a, b) = \frac{L(z)}{L(b)}\frac{L(x)}{||b||^2}(b, b) = L(z)\ ,$$

puisque $L(b) = L(x)$. $\square$

Remarque : Ce théorème sert à résoudre des équations : par exemple, c'est le théorème de Lax-Milgram. Exemple : si $f \in L^2(]0,1[)$ et si $H = H_0^1(]0,1[)$, en utilisant le Théorème de Riesz pour le produit scalaire :

$$(u, v) = \int_0^1 \big(u'(t)v'(t) + u(t)v(t)\big)\ \mathrm{d}t\ ,$$

et la forme linéaire continue $L(u) = \int_0^1 f(t)u(t)\ \mathrm{d}t$, on résout formellement $-u'' + u = f$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

9 Convergence faible

Définition III.1. *On dit que la suite $(x_n)_n$ d'éléments de H converge faiblement vers $l \in H$ si, pour toute forme linéaire continue L, $(L(x_n))_n$ converge vers $L(l)$ ou de manière équivalente si, pour tout $a \in H$, $(a, x_n) \to (a, l)$. Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers l, on note $x_n \rightharpoonup l$.*

Exemples (sympathiques ou moins sympathiques) :
1. En dimension finie, on peut utiliser pour L les formes linéaires coordonnées, $x = (x_1, \cdots, x_N) \mapsto x_i$ pour $1 \leq i \leq N$ et donc la convergence faible implique la convergence de toutes les coordonnées donc la convergence classique. *Nihil novi sub sole !*(5)

2. En dimension infinie, ça se gâte : si $H = l^2(\mathbb{N}) := \{y = (y_n)_n \; ; \; \sum_{i=0}^{+\infty} y_n^2 < +\infty\}$, muni de la norme :

$$||y||^2 := \sum_{i=0}^{+\infty} y_n^2 \; ,$$

on note $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots 0, \cdots)$ la suite qui ne contient que des 0 sauf un 1 à la nième place. $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H. On a simultanément :
- $||e_n|| = 1$ pour tout n,
- $e_n \rightharpoonup 0$: en effet, si $a = (a_n)_n \in H$, $(a, e_n) = a_n \to 0$ car la convergence de la série implique que a_n tend vers 0.

Cet exemple où l'on a à la fois $||e_n|| \equiv 1$ et $e_n \rightharpoonup 0$ montre bien la différence entre convergence faible et convergence forte (i.e. en norme), et la difficulté de manipuler une telle notion.

3. Autre exemple, dans $H = L^2(]0,1[)$, la suite de fonctions $u_n(t) = \sin(2\pi nt)$ converge faiblement vers 0 (Lemme de Riemann-Lebesgue) et pourtant sa norme L^2 reste constante (exercice !).

Remarque : Il faut faire bien attention à la définition : on doit considérer les suites (a, x_n) pour a FIXÉ. Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent faiblement, on ne sait rien a priori de (x_n, y_n) : on en a vu des exemples ci-dessus avec $y_n = x_n$. De même toute opération non linéaire sur les suites convergeant faiblement sont problématiques (cf. ci-dessus $\sin(2\pi nt)$ qui converge faiblement vers 0 mais pas $\sin^2(2\pi nt)$!).

Nous passons maintenant au résultat de compacité qui fait l'intérêt de l'introduction de la notion de convergence faible.

Théorème III.3. *Dans un espace de Hilbert H, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. En d'autres termes, les bornés sont précompacts pour la topologie faible.*

(5). rien de nouveau sous le soleil.

Ce théorème montre qu'il y a une différence fondamentale entre la topologie forte (la topologie usuelle de la convergence au sens de la norme) et la topologie faible car un autre théorème de Riesz nous dit que les bornés sont précompacts pour la topologie forte si et seulement si l'espace est de dimension finie. Bien sûr, le théorème III.3 est admis dans le cadre de ce cours.

Dans le cadre de la résolution de problèmes d'optimisation, ce résultat nous donne (dans les bons cas...) de la compacité pour les suites minimisantes mais, compte tenu de la remarque ci-dessus, il n'est pas clair a priori que l'on sera capable de passer à la limite dans la fonctionnelle pour prouver que la limite faible d'une suite minimisante est le point de minimum recherché. Le paragraphe suivant fournit des outils utiles dans cette direction.

Quelques résultats utiles :

Proposition III.1. *Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers l. Alors :*

$$\liminf_n J(x_n) \geq J(l).$$

En d'autres termes, J est sci pour la topologie faible.

Preuve : La convexité et le caractère C^1 de J implique :

$$J(y) \geq J(x) + J'(x)(y-x) \quad \text{pour tous } x, y \in H\ ,$$

et donc :

$$J(x_n) \geq J(l) + J'(l)(x_n - l)\ ,$$

et comme $J'(l)$ est une forme linéaire continue, $J'(l)(x_n - l) \to 0$ par la convergence faible. Il suffit donc de passer à la liminf. □

Remarque : $x \mapsto ||x||^2$ est convexe et de classe C^1, donc, si $x_n \rightharpoonup l$:

$$\liminf_n ||x_n||^2 \geq ||l||^2.$$

On en a vu deux exemples plus haut avec des inégalités strictes...

Proposition III.2. *Si $x_n \rightharpoonup l$ et si $||x_n|| \to ||l||$ alors $x_n \to l$.*

En d'autres termes : convergence faible + convergence de la norme = convergence forte.

Preuve : On écrit simplement :

$$||x_n - l||^2 = ||x_n||^2 - 2(l, x_n) + ||l||^2$$

et on remarque que, dans le membre de droite $(l, x_n) \to (l, l) = ||l||^2$ par la convergence faible alors que les deux autres termes convergent vers $||l||^2$. □

Remarque : Ce critère de convergence forte est souvent utile quand les propriétés de compacité sont simplement suffisantes pour passer à la limite a sens de la convergence faible (via des sous-suites). On récupère la convergence forte a posteriori.

Exercice 9. *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue, i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$|a(u,v)| \leq M||u||.||v|| \quad \textit{pour tous } u, v \in H \ .$$

Montrer qu'il existe une application linéaire continue $A : H \to H$ telle que :

$$a(u,v) = (Au, v) \ , \quad \textit{pour tous } u, v \in H \ .$$