

Première partie

**Introduction à la méthode
des éléments finis**

Chapitre 1

Les principes généraux de la méthode des éléments finis

1.1 Introduction

Dans le cours sur la méthode des différences finies, nous avons vu que la résolution du problème de Dirichlet :

$$(1.1) \quad -u''(x) = f(x) \quad \text{dans }]0, 1[,$$

$$(1.2) \quad u(0) = u(1) = 0,$$

était équivalente à celle du problème d'optimisation :

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(]0,1])} J(v),$$

où :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [v'(t)]^2 dt - \int_0^1 f(t)v(t) dt .$$

De plus, la fonctionnelle J étant strictement convexe, trouver l'unique point de minimum de J est équivalent à résoudre l'équation $J'(u) = 0$ qui s'écrit :

$$\int_0^1 u'(t)v'(t) dt - \int_0^1 f(t)v(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[) .$$

Dans la première partie, nous n'avons pas exploité cette propriété ; au contraire, nous allons le faire de manière systématique dans cette deuxième partie.

Pour cela, nous introduisons les notations suivantes : si $v, w \in H_0^1(]0, 1[)$, on pose :

$$a(v, w) := \int_0^1 v'(t)w'(t) dt ,$$

$$L(v) := \int_0^1 f(t)v(t) dt .$$

Les applications a et L sont respectivement une forme bilinéaire continue et une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0, 1[)$ et l'équation $J'(u) = 0$ est équivalente à :

Trouver $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que :

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[) .$$

Nous allons tout d'abord montrer comment résoudre simplement (et de manière générale) ce type de problème, non seulement dans $H_0^1(]0, 1[)$ mais dans un espace de Hilbert général V (ce qui ne présente pas de difficulté supplémentaire). Puis nous montrerons comment cette formulation permet d'obtenir une (famille de) méthode(s) numérique(s) : en fait, il suffit de remplacer V dans l'énoncé ci-dessus par un espace de dimension finie V_h inclus dans V et de dimension grande pour qu'il "approche bien" V : c'est la méthode de Galerkin. Le problème ci-dessus se réduit alors à un système linéaire et on utilise les méthodes de la première partie pour le résoudre. L'étude de la méthode numérique comporte alors deux points essentiels : (i) comment choisir les V_h ? et (ii) quelles estimations de convergence a-t-on ?

1.2 L'approche abstraite : le théorème de Lax-Milgram et la méthode de Galerkin

1.2.1 Le théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram montre que le problème abstrait introduit dans l'introduction admet une unique solution sous des conditions très générales : nous en donnons une version simplifiée et nous renvoyons aux exercices pour des formulations plus élaborées (forme bilinéaire non symétrique, théorème de Stampacchia,...etc).

On considère un espace de Hilbert V dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$. On introduit l'hypothèse suivante sur a :

(H) La forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue*, i.e. il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \text{pour tous } u, v \in V ,$$

et *coercive*, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in V .$$

Théorème 1.1. (Théorème de Lax-Milgram) *Si la forme bilinéaire symétrique a satisfait **(H)** et si L est une application linéaire continue sur V alors il existe un unique $u \in V$ tel que :*

$$(1.3) \quad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V .$$

De plus, u est aussi l'unique solution du problème d'optimisation (problème variationnel) :

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) ,$$

$$\text{où } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Dans cet énoncé, nous avons supposé que a est *symétrique* car cette hypothèse simplifie la preuve et même la trivialisent : en effet, grâce à cette hypothèse, la première partie du résultat découle immédiatement du théorème de représentation de Riesz (cf. les rappels d'Analyse hilbertienne), la forme bilinéaire a étant un produit scalaire dont la norme associée est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ sur V . La deuxième partie peut soit s'obtenir aisément à partir de la première en calculant $J(u+h)$ pour tout $h \in V$ et en constatant que $J(u+h) > J(u)$ si $h \neq 0$, soit, plus sportivement, en empruntant les arguments du cours du premier semestre et en résolvant directement le problème d'optimisation.

1.2.2 La méthode de Galerkin

Dans cette section, on cherche à approcher numériquement la solution $u \in V$ de l'équation (1.3). L'idée de la méthode de Galerkin est de se ramener à un espace de dimension finie en considérant des sous-espace vectoriel de dimension finie $V_h \subset V$ et de résoudre :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$(1.4) \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

Pour montrer que (1.4) a une solution, on peut remarquer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie V_h de V est fermé et donc V_h est un espace de Hilbert (associé au même produit scalaire et à la même norme) et appliquer le Théorème de Lax-Milgram à ce nouveau problème. Il paraît néanmoins plus économique de choisir une base de V_h et de prouver que (1.4) est un système linéaire inversible (voir ci-dessous).

Nous allons maintenant donner une estimation de l'erreur commise en remplaçant u par u_h , *i.e.* une estimation de $\|u - u_h\|$.

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| = \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) ,$$

où $d(u, V_h)$ désigne la distance de u au sous-espace V_h (voir le théorème de projection dans les rappels d'Analyse hilbertienne).

Ce résultat peut paraître surprenant : en effet, il montre que la distance entre u et u_h est du même ordre que la distance de u à V_h , donc du même ordre que la plus petite distance possible de u aux éléments de V_h . Ce n'est surprenant qu'en apparence car, en utilisant les équations satisfaites par u et u_h , on a :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h,$$

et cette égalité montre que u_h n'est autre que la projection de u sur V_h pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. À l'équivalence des normes près, on a donc essentiellement la même distance.

Le terme $d(u, V_h)$ peut être vu comme une erreur d'interpolation [pensez au cas où u est une fonction régulière et V_h est un espace de polynômes] et la combinaison entre le Théorème 1.2 et une estimation de cette erreur d'interpolation nous donnera plus loin une estimation de convergence pour cette méthode.

Preuve : Pour tout $w_h \in V_h$, on a :

$$a(u, w_h) = L(w_h),$$

puisque $V_h \subset V$. Donc :

$$a(u, w_h) = a(u_h, w_h).$$

Comme a est bilinéaire, on en déduit :

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \text{pour tout } w_h \in V_h.$$

Soit alors v_h un élément quelconque de V_h . En posant $w_h = v_h - u_h$, on obtient $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ et en écrivant $v_h - u_h = v_h - u + u - u_h$ puis en utilisant la bilinéarité de a , on est conduit à :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

En utilisant **(H)**, il en résulte :

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq c \|u - u_h\| \|u - v_h\|.$$

Donc : ou bien $u = u_h$ et l'inégalité souhaitée est trivialement vérifiée, ou bien, en divisant par $\|u - u_h\|$, on obtient :

$$\alpha \|u - u_h\| \leq c \|u - v_h\|.$$

Comme cette propriété est vraie pour tout $v_h \in V_h$, on a bien :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{c}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

□

On va maintenant montrer comment se ramener à un système linéaire.

Si V_h est de dimension N , on peut choisir une base (w_1, \dots, w_N) de V_h . On peut alors décomposer u_h dans la base (w_1, \dots, w_N) :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j^h w_j ,$$

où les $u_j^h \in \mathbb{R}$ sont donc les coordonnées de u_h dans cette base.

D'autre part, la propriété $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$ est clairement équivalente à $a(u_h, w_i) = L(w_i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$ (une application linéaire est complètement déterminée par sa donnée sur une base). Par conséquent, en utilisant la bilinéarité de a , on voit que (1.4) est équivalent à : pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$a \left(\sum_{j=1}^N u_j^h w_j, w_i \right) = \sum_{j=1}^N u_j^h a(w_j, w_i) = L(w_i).$$

En notant $a_{i,j} = a(w_j, w_i)$, $b_i = L(w_i)$ puis $A = (a_{i,j})_{i,j}$, $b = (b_i)_i$ et $U_h = (u_i^h)_i$, la dernière égalité ci-dessus (en faisant varier i) se réécrit sous la forme du système linéaire :

$$AU_h = b .$$

On remarque que la matrice A est symétrique, définie positive puisque, pour tout $V \in V_h$, $(AV, V) \geq \alpha \|V\|^2$ (à condition de prendre sur V_h la norme induite par celle de V).

Par cette méthode générale, on construit de manière systématique un schéma d'approximation numérique pour l'équation (1.3) par la donnée d'une suite $(V_h)_{h>0}$ de sous-espaces vectoriels de dimension finie de V . La consistance se définit alors de la manière suivante :

Définition 1.1. *On dira que l'approximation de V par la famille $(V_h)_{h>0}$ est consistante si et seulement si :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(u, V_h) = 0 \quad \text{pour tout } u \in V .$$

Contrairement au cas des différences finies, une méthode numérique consistante est donc forcément convergente par le théorème 1.2.

On peut ici aussi définir une *méthode d'ordre k* qui est une approximation de V par une famille $(V_h)_{h>0}$ telle que :

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \leq Ch^k \text{ pour tout } h > 0,$$

où C est une constante indépendante de h . On voit ici aussi que le théorème 1.2 implique immédiatement :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{CM}{\alpha} h^k \text{ pour tout } h > 0 ;$$

on dira que l'ordre de convergence du schéma est k .

On va maintenant montrer comment construire des espaces V_h en commençant par l'exemple le plus simple en dimension 1 (ce cours se réduit à la dimension 1, même si des idées analogues permettent de traiter, théoriquement, le cas de dimensions quelconques et en pratique celui des dimensions 2 et 3.).

Chapitre 2

Un premier exemple : les éléments finis de Lagrange en dimension 1

On va considérer le problème modèle de l'introduction : trouver $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que :

$$\int_0^1 u'(t)v'(t) dt - \int_0^1 f(t)v(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[) .$$

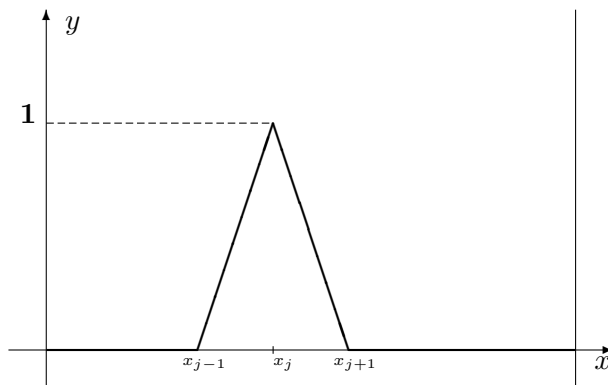
Pour construire l'espace V_h , on introduit une discrétisation, comme dans le cas des différences finies, avec une grille uniforme :

$$x_j = j\Delta x \quad (0 \leq j \leq N + 1) ,$$

où $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. On pose $h = \Delta x$.

Puis, pour $1 \leq j \leq N$, on introduit les fonctions φ_j^h définies par :

- $\varphi_j^h(x_j) = 1$,
- $\varphi_j^h(x_l) = 0$ si $l \neq j$,
- φ_j^h est affine sur chaque intervalle $[x_l, x_{l+1}]$ pour tout $0 \leq l \leq N$.



La fonction φ_j^h

On notera V_h l'espace engendré par les N fonctions φ_j^h . On va d'abord montrer le :

Lemme 2.1. *L'espace V_h est inclus dans $H_0^1(]0, 1[)$.*

Preuve : Bien entendu, il suffit de montrer que les fonctions φ_j^h sont dans $H_0^1(]0, 1[)$ et, pour cela, on remarque que l'on a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\varphi_j^h(x) = \int_0^x w_j^h(t) dt ,$$

où :

$$w_j^h(t) = \begin{cases} 1/h & \text{si } x \in]x_{j-1}, x_j[\\ -1/h & \text{si } x \in]x_j, x_{j+1}[\\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Comme $w_j^h \in L^2(]0, 1[)$, $\varphi_j^h \in H_0^1(]0, 1[)$ et, de plus, $(\varphi_j^h)' = w_j^h$ dans $]0, 1[$. \square

On procède alors comme indiqué à la fin de la section 1.2 ; si :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j^h \varphi_j^h ,$$

alors $U_h = (u_i^h)_i$ est solution du système linéaire :

$$AU_h = b .$$

où $A = (a_{i,j})_{i,j}$, $b = (b_i)_i$ sont donnés par :

$$a_{i,j} = \int_0^1 (\varphi_i^h)'(t) (\varphi_j^h)'(t) dt ,$$

$$b_i = \int_0^1 f(t) \varphi_i^h(t) dt .$$

Pour calculer les $a_{i,j}$, on distingue trois cas :

- si $|i - j| > 1$, on a $a_{i,j} = 0$ car les supports de $(\varphi_i^h)'$ et $(\varphi_j^h)'$ sont disjoints.

- si $|i - j| = 1$, comme A est symétrique, il suffit de calculer $a_{i-1,i}$ pour $2 \leq i \leq N$:

$$a_{i-1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{h} \frac{1}{h} dt = -\frac{1}{h} .$$

- si $i = j$:

$$a_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dt + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dt = \frac{2}{h} .$$

Finalement :

$$A = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

une matrice que n'est pas tout à fait inconnue...

Pour les b_i , on doit utiliser une méthode de calcul approché d'intégrale : par exemple, la méthode des rectangles :

$$b_i = \int_0^1 f(t)\varphi_i^h(t)dt \simeq f(x_j) \int_0^1 \varphi_i^h(t) = f(x_j)h .$$

Avec cette approximation, on retrouve exactement le même système linéaire que celui obtenu par la méthode des différences finies.

Il y a tout de même une différence méthodologique importante : au lieu de "bricoler" un schéma, on en a construit un de manière systématique.

Reste à prouver (si besoin est ?) qu'il converge et là aussi on raisonne de manière systématique en se reportant à la section 1.2 qui montre qu'il suffit d'évaluer $d(u, V_h)$. La première idée consisterait à tenter d'évaluer $\|u - \Pi_h u\|$ (et donc peut-être à tenter de calculer $\Pi_h u$) mais $\Pi_h u$ n'est pas facilement accessible et on va plutôt utiliser $\bar{\Pi}_h u$ défini par

$$\bar{\Pi}_h u(x) = \sum_{j=1}^N u(x_j)\varphi_j^h ,$$

et estimer $\|u - \bar{\Pi}_h u\| \geq \|u - \Pi_h u\|$.

Pour formuler le résultat, on a besoin d'introduire l'espace $H^2(]0, 1[)$ constitué des fonctions $u \in H^1(]0, 1[)$ telles que $u' \in H^1(]0, 1[)$. En notant $u'' = (u')'$ [NB : il est important de se rappeler que, pour les fonctions de $H^1(]0, 1[)$, la dérivée u' est à prendre au sens "généralisé", d'où cette précaution], on peut voir $H^2(]0, 1[)$ comme l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $u'' \in L^2(]0, 1[)$. Le lecteur inquiet pourra aussi considérer, au moins dans un premier temps, que u est de classe \mathcal{C}^2 mais que l'on souhaite utiliser des normes L^2 pour u' et u'' .

On a le :

Théorème 2.1. *Pour tout $u \in H_0^1(]0, 1[)$, on a :*

$$\|u - \bar{\Pi}_h u\|_\infty \leq h^{1/2} \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2(]0, 1[)} ,$$

et :

$$\|u - \bar{\Pi}_h u\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2(]0, 1[)} .$$

Si, de plus, $u \in H^2(]0, 1[)$ alors :

$$\|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \|u''\|_{L^2(]0, 1[)} .$$

En particulier, si $f \in L^2(]0, 1[)$, la solution du problème de Dirichlet satisfait :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(]0, 1[)} \leq ch \|u''\|_{L^2(]0, 1[)} ,$$

où la constante c est celle intervenant dans l'inégalité de Poincaré.

Bien que nous l'ayons passé sous silence jusque là, il n'aura pas échappé au lecteur que $\bar{\Pi}_h u$ est obtenu par un procédé d'interpolation de Lagrange sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, l'accumulation de ces interpolations sur les N intervalles s'apparentant à la méthode de Newton-Cotes pour le calcul approché d'intégrales. Si on remplace ci-dessus la norme L^2 par la norme L^∞ , H^1 par C^1 et H^2 par C^2 , on retrouve des estimations (qui devraient être) familières ; seul le changement de norme induit des différences.

Preuve : Soit $0 \leq j \leq N$. Puisque $u(x_j) = \bar{\Pi}_h u(x_j)$, on a, pour tout $t \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$(u - \bar{\Pi}_h u)(t) = \int_{x_j}^t (u - \bar{\Pi}_h u)'(s) ds ,$$

et, par Cauchy-Schwarz :

$$|(u - \bar{\Pi}_h u)(t)| \leq (t - x_j)^{1/2} \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])} .$$

D'où la première inégalité du théorème en majorant $(t - x_j)^{1/2}$ par $h^{1/2}$ et $\|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])}$ par $\|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2(]0, 1[)}$.

Puis on élève cette inégalité au carré et on intègre de x_j à x_{j+1} :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |(u - \bar{\Pi}_h u)(t)|^2 dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - x_j) dt \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])}^2 ;$$

d'où :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |(u - \bar{\Pi}_h u)(t)|^2 dt \leq \frac{h^2}{2} \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])}^2 .$$

On somme ensuite sur j et la relation de Chasles nous donne :

$$\int_0^1 |(u - \bar{\Pi}_h u)(t)|^2 dt \leq \frac{h^2}{2} \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2(]0, 1[)}^2 .$$

D'où le deuxième point du théorème.

Enfin, si $u \in H^2(]0, 1[)$, par une intégration par partie (aisément justifiable ?), on a :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [(u - \bar{\Pi}_h u)'(s)]^2 ds = - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u - \bar{\Pi}_h u)(s) u''(s) ds ;$$

en effet, $u = \bar{\Pi}_h u$ en x_j et x_{j+1} et $(\bar{\Pi}_h u)'$ est constant sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [(u - \bar{\Pi}_h u)'(s)]^2 ds \leq \|u - \bar{\Pi}_h u\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])} \|u''\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])} ,$$

qui conduit, grâce à la deuxième propriété démontrée ci-dessus, à :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [(u - \bar{\Pi}_h u)'(s)]^2 ds \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \|(u - \bar{\Pi}_h u)'\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])} \|u''\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])} ,$$

et donc à :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [(u - \bar{\Pi}_h u)'(s)]^2 ds \leq \frac{h^2}{2} \|u''\|_{L^2([x_j, x_{j+1}])}^2 .$$

Le résultat final s'obtient alors en sommant sur j . □

Remarque : Éléments finis P_2, P_3, \dots :

La méthode ci-dessus, basée sur une interpolation de Lagrange par des polynômes de degrés 1 (donc de P_1), peut être remplacée par une méthode basée sur une interpolation par des polynômes de degrés plus élevés sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$: P_2, P_3 ou même plus. Cela conduit à remplacer V_h par un espace de fonctions P_2 par morceaux, P_3 par morceaux,...

L'ordre d'interpolation étant plus grand, la convergence est elle aussi meilleure (cf. Théorème 1.2) mais la dimension des V_h étant a priori plus grande, le coût de résolution du système linéaire associé est lui aussi plus important. Donc il faut faire des choix...

Chapitre 3

La méthode des éléments finis en dimension supérieure

3.1 Les espaces de Sobolev $H^1(]0, 1[)$ et $H_0^1(]0, 1[)$

On rappelle que l'espace $H^1(]0, 1[)$ est constitué des fonctions v de $L^2(]0, 1[)$ pour lesquelles il existe un nombre réel μ et une fonction w de $L^2(]0, 1[)$ tels que :

$$v(x) = \mu + \int_0^x w(t) dt \quad \text{p.p. dans }]0, 1[.$$

Si $v \in H^1(]0, 1[)$ alors le couple (μ, w) est unique et, par analogie avec le cas des fonctions C^1 , on note v' la fonction w ; c'est une dérivée "généralisée" de v .

On peut munir $H^1(]0, 1[)$ de la norme $\|v\|_{H^1(]0, 1[)}$ définie par :

$$\|v\|_{H^1(]0, 1[)}^2 = \|v\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}^2$$

et muni de cette norme, l'espace $H^1(]0, 1[)$ est un espace de Hilbert dans lequel l'espace $C^1([0, 1])$ est dense.

On rappelle également que les fonction de $H^1(]0, 1[)$ sont continues : l'injection de $H^1(]0, 1[)$ dans l'espace des fonctions höldériennes $C^{0,1/2}([0, 1])$ est même continue.

On note $H_0^1(]0, 1[)$ le sous-espace (fermé) de $H^1(]0, 1[)$ constitué des fonctions v de $H^1(]0, 1[)$ qui vérifient $v(0) = v(1) = 0$. Les fonctions de $H_0^1(]0, 1[)$ satisfont l'*inégalité de Poincaré*, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in H_0^1(]0, 1[)$:

$$\|u\|_{H^1(]0, 1[)} \leq C \|u'\|_{L^2}.$$

Cette inégalité montre que $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est une norme sur $H_0^1(]0, 1[)$ qui est équivalente à la norme $H^1(]0, 1[)$ et que, muni de cette norme, $H_0^1(]0, 1[)$ est un espace de Hilbert.

Une démonstration de l'inégalité de Poincaré peut se faire via le Lemme de Peetre (que nous utiliserons pour d'autres preuves) :

Lemme 3.1. Lemme de Peetre

Soient E_1, E_2 et E_3 trois espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$. On suppose que

1. La norme $\|\cdot\|_{E_1}$ est équivalente à $\|A \cdot\|_{E_2} + \|B \cdot\|_{E_3}$
2. L'application B est compacte

Alors :

- (i) $\ker A$ est de dimension finie
- (ii) $\text{Im}(A)$ est fermée
- (iii) Si un opérateur $L \in \mathcal{L}(E_1, F)$ où F est un autre espace de Banach vérifie $Lu = 0$ sur $\ker A$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|LU\|_F \leq C\|L\| \cdot \|Au\|_{E_2}.$$

- (iv) Si un opérateur $M \in \mathcal{L}(E_1, G)$ où G est un autre espace de Banach vérifie $Mu \neq 0$ sur $\ker A \setminus \{0\}$ alors la norme $\|\cdot\|_{E_1}$ est équivalente à $\|A \cdot\|_{E_2} + \|M \cdot\|_G$

Ce résultat est très pratique pour montrer des équivalences de normes et nous l'utiliserons plusieurs fois mais il faut en revanche connaître quelques résultats de compacité, en particulier le :

Lemme 3.2. Les injections de $H^1(]0, 1[)$ et $H_0^1(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$ sont compactes.

Preuve du lemme : Ce résultat se prouve assez simplement en utilisant les rappels d'Analyse hilbertienne : si $(v_k)_k$ est une suite de fonctions qui est bornée dans $H^1(]0, 1[)$ alors $(v'_k)_k$ est une suite bornée dans L^2 et il existe une sous-suite (toujours notée $(v'_k)_k$) qui converge faiblement dans L^2 . Mais, pour tout x dans $]0, 1[$:

$$v_k(x) = \mu_k + \int_0^x v'_k(t) dt = \mu_k + (v'_k, \mathbb{1}_{[0,x]}),$$

et, quitte à extraire une sous-suite convergente de la suite $(\mu_k)_k$, on voit que $(v_k(x))_k$ converge pour tout x . Il suffit de se rappeler que l'injection de $H^1(]0, 1[)$ dans $C^{0,1/2}$ est continue, ce qui montre que les $(v_k)_k$ sont uniformément bornés, pour pouvoir appliquer le théorème de Lebesgue et obtenir la convergence dans L^2 de la suite $(v_k)_k$. [Ajout : la norme $C^{0,1/2}$ restant bornée, on voit facilement que la limite ponctuelle est elle-même $C^{0,1/2}$ et en travaillant un peu plus, on aurait la convergence uniforme des v_k , ce qui nous évoquerait le ... Théorème d'Ascoli!] \square

Preuve du lemme de Peetre : On pose $X = \ker(A)$. D'après 1., il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que :

$$c_1 \|u\|_{E_1} \leq \|Bu\|_{E_3} \leq c_2 \|u\|_{E_1} \quad \text{pour tout } u \in X .$$

La première inégalité implique que la boule unité de X est compacte : en effet, si $(u_k)_k$ est une suite à valeur dans cette boule unité, $(Bu_k)_k$ est à valeurs dans un compact puisque B est compacte et donc il existe une sous-suite $(Bu_{k'})_{k'}$ qui converge. Or, d'après l'inégalité ci-dessus :

$$c_1 \|u_{k'} - u_{k'_1}\|_{E_1} \leq \|Bu_{k'} - Bu_{k'_1}\|_{E_3} ,$$

pour tous termes $u_{k'}, u_{k'_1}$ de la sous-suite et par conséquent, $(u_{k'})_{k'}$ est une suite de Cauchy donc convergente. D'après le Théorème de Riesz, la boule unité de X étant compacte, X est de dimension finie.

Pour le point (ii) : comme conséquence du Théorème de Hahn-Banach, X admet un supplémentaire fermé $Y^{(1)}$ et on affirme que :

$$\|Au\|_{E_2} \geq c \|u\|_{E_1} \quad \text{pour tout } u \in Y ,$$

pour une certaine constante $c > 0$.

Sinon il existerait une suite $(u_k)_k$ d'éléments de Y tels que :

- $\|u_k\|_{E_1} \equiv 1$,
- $\|Au_k\|_{E_2} \rightarrow 0$.

Or, d'après 2., comme pour le premier point, $(Bu_k)_k$ est à valeurs dans un compact et il existe une sous-suite $(Bu_{k'})_{k'}$ qui converge. Mais d'après 1. :

$$c_1 \|u_{k'} - u_{k'_1}\|_{E_1} \leq \|Au_{k'} - Au_{k'_1}\|_{E_2} + \|Bu_{k'} - Bu_{k'_1}\|_{E_3} ,$$

pour tous termes $u_{k'}, u_{k'_1}$ de la sous-suite ; par conséquent, $(u_{k'})_{k'}$ est une suite de Cauchy donc convergente. Si \bar{u} est sa limite, on a :

- $\bar{u} \in Y$ car Y est fermé,
- $\|\bar{u}\|_{E_1} = 1$
- $A\bar{u} = 0$.

Il en résulte que $\bar{u} \in X \cap Y = \{0\}$, donc $\bar{u} = 0$, contradiction avec la deuxième propriété.

Pour (iii) : sur Y , A est injectif et d'image fermée. Donc $Im(A)$ est un Banach et A est une bijection de Y sur $Im(A)$. Le théorème de Banach nous dit que R , la bijection réciproque, est continue, donc :

$$\|Lu\|_F = \|LRAu\|_F \leq \|L\| \cdot \|R\| \cdot \|Au\|_F \quad \text{pour tout } u \in E_1 .$$

Pour (iv), il faut démontrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in E_1$:

$$c \|u\|_{E_1} \leq \|Au\|_{E_2} + \|Mu\|_G ,$$

⁽¹⁾le Théorème de Hahn-Banach permet de projeter sur X !

l'autre inégalité étant la conséquence de la continuité de A et M .

On procède par l'absurde : si cette inégalité était fausse, il existerait une suite $(u_k)_k$ d'éléments de E_1 tels que :

- $\|u_k\|_{E_1} \equiv 1$,
- $\|Au_k\|_{E_2} + \|Mu_k\|_G \rightarrow 0$.

Par les mêmes arguments que pour (ii), on en déduit l'existence de \bar{u} tel que :

- $\|\bar{u}\|_{E_1} = 1$
- $A\bar{u} = 0$,
- $M\bar{u} = 0$

Contradiction puisque $\ker(A) \cap \ker(M) = \{0\}$. □

La preuve de l'inégalité de Poincaré se fait donc comme suit : on pose $E_1 = H_0^1(]0, 1[)$, $E_2 = L^2(]0, 1[)$, $E_3 = L^2(]0, 1[)$ et :

$$A : u \mapsto u' ,$$

B est l'injection compacte de $H_0^1(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[)$.

On vérifie aisément que les hypothèses du Lemme de Peetre sont satisfaites et comme $\ker(A) = \{0\}$, la condition sur M dans (iv) est vide et on peut prendre $G = \mathbb{R}$ et $Mu \equiv 0$. L'inégalité de Poincaré résulte alors immédiatement de (iv)

Remarque : Ces résultats peuvent s'étendre, toujours par exemple grâce au Lemme de Peetre, à l'espace $V = \{v \in H^1(]0, 1[)/v(0) = 0\}$ ou à d'autres cas pour lesquels V est défini via des relations intégrales.

Nous terminons par un résultat de régularité pour les solutions du problème de Dirichlet qui se formule maintenant sous la forme "Lax-Milgram" :

Trouver une fonction $u \in H_0^1(]0, 1[)$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(]0, 1[)$:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx .$$

Pour cela, on introduit la définition suivante :

Définition 3.1. Une fonction $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $H^2(]0, 1[)$ si $v \in H^1(]0, 1[)$ et si $v' \in H^1(]0, 1[)$. On notera $v'' = (v')'$.

Plus généralement, on définit par récurrence $H^m(]0, 1[)$ comme l'espace des fonctions $v \in H^{m-1}(]0, 1[)$ pour lesquelles $v^{(m-1)} \in H^1(]0, 1[)$ et on pose $v^{(m)} = (v^{(m-1)})'$. On peut donc voir $H^m(]0, 1[)$ comme l'espace des fonctions v telles que v et les dérivées $v', v'', \dots, v^{(m)}$ sont toutes dans L^2 et on munira $H^m(]0, 1[)$ de la norme (hilbertienne = exercice) :

$$\|v\|_{H^m}^2 = \sum_{n=0}^m \|v^{(n)}\|_{L^2}^2 .$$

Le résultat est le suivant :

Théorème 3.1. • Si $f \in L^2(]0, 1[)$ alors $u \in H^2(]0, 1[)$ et il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2} .$$

• Si $k = m + 2$ pour $m \geq 1$ et si $f \in H^m(]0, 1[)$ alors $u \in H^{m+2}(]0, 1[)$ et il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m} .$$

On gagne donc “2 crans de régularité” mais ici $H^m - H^{m+2}$ au lieu de $C^m - C^{m+2}$.

3.2 Présentation générale d'une méthode d'éléments finis

Nous nous réduisons ici à une présentation des éléments finis en dimension 1. En dimension supérieure, il faudrait construire l'analogue du maillage $x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}$ utilisé en dimension 1 et en particulier, des mailles $[x_j, x_{j+1}]$; une telle partition de l'intervalle $]0, 1[$ (ou d'un autre intervalle) se ferait, en dimensions supérieures, en utilisant des éléments géométriques simples (triangle, rectangle, N -simplexe,...).

Un *élément fini*, dans le cas général, c'est :

- un ensemble géométrique qui se réduit, en dimension 1, à un intervalle (en dimension supérieure, c'est là qu'interviennent les triangles, rectangles, N -simplexes,...),
- un espace P de polynômes définis sur cet ensemble (P_1, P_2 ou des espaces définis de manière plus complexe),
- un ensemble Σ de degrés de liberté qui sont des formes linéaires sur P .

Définition 3.2. On dit que $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_L\}$ est P -unisolvant si la donnée des valeurs de $p \in P$ sur l'ensemble des formes linéaires de σ_i détermine p de manière unique. En d'autres termes, Σ est P -unisolvant si l'application de P dans \mathbb{R}^L qui, à $p \in P$, associe $(\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots, \sigma_L(p))$ est bijective.

Dans le cas de la dimension 1 avec les éléments de Lagrange, l'ensemble géométrique était un intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, l'ensemble de polynômes était P_1 (l'espace des polynôme de degré inférieur ou égal à 1) et Σ était l'ensemble des formes linéaires $P \rightarrow P(x_j)$ et $P \rightarrow P(x_{j+1})$. La théorie de l'interpolation de Lagrange nous dit bien que Σ est P_1 -unisolvant.

Cet exemple de la dimension 1 montre bien qu'une méthode d'éléments finis, c'est d'abord une façon d'interpoler des fonctions par des polynômes :

en dimension 2, 3 ou même N , il faudrait donc se donner l'ensemble sur lequel on interpole (car on n'a pas d'analogie "naturel" aux intervalles...), l'espace de polynômes et la manière dont on interpole (Σ).

On suppose désormais que l'on travaille en dimension 1 dans l'ouvert $]0, 1[$ (NB : on peut toujours s'y ramener...) qui est déjà écrit sous forme d'une réunion d'intervalles (on n'utilise pas forcément celle induite par la grille uniforme) ; plus précisément, puisque l'on considère que les intervalles sont fermés :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^K I_k^h,$$

où les intervalles sont deux à deux disjoints (dans le sens où leurs intérieurs sont deux à deux disjoints).

À partir de cette partition, si V est un espace de fonctions définies sur $[0, 1]$, l'espace V_h sera un ensemble de fonctions qui sont polynomiales sur chaque triangle I_k^h et qui se raccordent d'une certaine manière (ne pas oublier la contrainte $V_h \subset V$...).

L'étude d'une méthode d'éléments finis consiste, d'une part, à étudier un intervalle I_k^h isolé (unisolvance, opérateur d'interpolation, erreur d'interpolation,...) puis, à partir des interpolées locales sur chaque I_k^h , reconstruire l'élément de V_h qui est défini sur $]0, 1[$ tout entier (étude des "raccords" entre deux intervalles, en particuliers).

3.3 Exemples d'éléments finis et études de leurs propriétés d'unisolvance

On notera $I =]a, b[$ l'intervalle sur lequel on travaille.

3.3.1 Éléments de Lagrange

On revoit rapidement cet exemple pour le placer dans un cadre systématique. Dans ce cas :

$$\Sigma = \{p(a), p(b)\},$$

et P est l'espace P_1 des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Comme $\text{card}(\Sigma) = 2 = \text{dim}(P_1)$, il suffit de montrer que l'application linéaire $p \rightarrow (p(a), p(b))$ est injective, c'est-à-dire que son noyau est réduit à 0, ce qui est évident ici car un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui a deux zéros distincts est identiquement nul.

3.3.2 Éléments de Hermite

Dans ce cas :

$$\Sigma = \{p(a), p(b), p'(a), p'(b)\},$$

et P est l'espace P_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

En raisonnant de manière analogue, on prouve facilement l'unisolvance (polynômes de degré inférieur ou égal à 3 avec deux zéros doubles).

3.3.3 Éléments type Argyris

Dans ce cas :

$$\Sigma = \{p(a), p(b), p'(a), p'(b), p''(a), p''(b), p(c)\} \quad \text{où } c = \frac{a+b}{2},$$

et P est l'espace P_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 6.

De même, l'étude de l'unisolvance se réduit à l'étude des zéros d'un polynôme.

3.3.4 Éléments intégraux

Un cas un peu différent est le suivant où l'une des formes linéaires est donnée par une intégrale. Par exemple :

$$\Sigma = \{p(a), p(b), \int_a^b p(t)dt\},$$

et P est l'espace P_2 des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Comme $\text{card}(\Sigma) = 3 = \dim(P_2)$, il suffit de montrer que l'application linéaire $p \rightarrow (p(a), p(b), \int_a^b p(t)dt)$ est injective, c'est-à-dire que son noyau est réduit à 0. Grâce aux deux premières propriétés, on voit que p est forcément de la forme $A(t-a)(t-b)$ pour une certaine constante A . On calcule alors :

$$\int_a^b (t-a)(t-b)dt = -\frac{(b-a)^3}{6} \neq 0,$$

donc $A = 0$ et l'unisolvance est prouvée.

3.4 Erreurs d'interpolation sur l'intervalle de référence

Pour évaluer les erreurs d'interpolation, on va d'abord considérer le cas d'un intervalle de référence \hat{I} (typiquement l'intervalle unité $[0, 1]$) puis on "transférera" sur le résultat sur un intervalle quelconque par un changement de variable affine.

Pour formuler le résultat, on introduit un opérateur d'interpolation linéaire continu $\hat{\Pi} : H^{l+1}(\hat{I}) \rightarrow H^m(\hat{I})$ avec $0 \leq m \leq l$ tel que :

$$\hat{\Pi}(p) = p \quad \text{pour tout } p \in P_l.$$

Pour $m = 0$, on utilise la convention $H^m(\hat{I}) = L^2(\hat{I})$.

Théorème 3.2. *Il existe une constante c telle que :*

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_{H^m} \leq c|v|_{H^{l+1}} \quad \text{pour tout } v \in H^{l+1}(\hat{I}),$$

où :

$$|v|_{H^{l+1}} := \|v^{(l+1)}\|_{L^2}.$$

Il est à noter que ce type de résultat est classique si on considère des espaces fonctionnels du type $C^m - C^{l+1}$; la difficulté vient ici du fait que l'on estime l'erreur d'interpolation avec des normes d'espaces de Sobolev.

Preuve : On utilise le Lemme de Peetre : on pose $E_1 = H^{l+1}(\hat{I})$, $E_2 = L^2(\hat{I})$ et $E_3 = H^l(\hat{I})$. On utilise l'application $A : E_1 \rightarrow E_2$ qui, à $v \in H^{l+1}(\hat{I})$ associe sa dérivée d'ordre $l+1$ et donc $\ker(A) = P_l$. Enfin B est l'injection de E_1 dans E_3 qui est bien compacte. On utilise la conclusion (iii) du Lemme de Peetre avec $L : E_1 \rightarrow H^m(\hat{I})$ défini par $Lv = v - \hat{\Pi}v$. On a bien $Lv = 0$ sur $\ker(A)$ donc, pour tout $v \in v \in H^{l+1}(\hat{I})$:

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_{H^m} \leq C\|Id - \hat{\Pi}\|. |v|_{H^{l+1}}.$$

□

3.4.1 Cas des éléments de Lagrange

Comme $\Sigma = \{p(a), p(b)\}$, $\hat{\Pi}v$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 1 tel que $\hat{\Pi}v(x) = v(x)$ pour $x = a, b$. Mais pour que cette phrase ait un sens si $v \in H^{l+1}(\hat{I})$, il faut que considérer les valeurs de v aux points a_i ait un sens, typiquement que v soit continu.

On rappelle le résultat suivant, cas particuliers des injections de Sobolev :

Théorème 3.3. *Si I est un intervalle de \mathbb{R} alors :*

$$H^n(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\bar{I}) \quad \text{si } n > k.$$

On en déduit que :

- $H^n(\hat{I}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{I})$ si $n \geq 1$,
- $H^n(\hat{I}) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\bar{I})$ si $n \geq 2$,
- $H^n(\hat{I}) \hookrightarrow \mathcal{C}^2(\bar{I})$ si $n \geq 3$.

Par conséquent, dans le cas des éléments de Lagrange, on va travailler avec $H^1(\hat{I})$ puisque les fonctions de H^1 sont continues. On peut donc appliquer le théorème précédent avec $l+1 = 1$ et $m = 0$; en effet, $\hat{\Pi}v$ est un polynôme et il est donc dans $H^1(\hat{I})$ puisqu'il est de classe \mathcal{C}^1 et $\hat{\Pi}$ est continu puisque l'injection de Sobolev est continue. De plus :

$$\hat{\Pi}(p) = p \quad \text{pour tout } p \in P_1.$$

Finalement :

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_{L^2} \leq c|v|_{H^1},$$

pour tout $v \in H^1(\hat{I})$.

3.4.2 Cas des éléments de Hermite

En raisonnant de manière analogue, il faut que v soit de classe \mathcal{C}^1 pour que $\hat{\Pi}v$ soit bien défini dans le cas des éléments de Hermite. Il faut donc que $l + 1 \geq 2$. De plus, comme Σ est P_3 unisolvant, on a :

$$\hat{\Pi}(p) = p \quad \text{pour tout } p \in P_3 .$$

Il résulte plusieurs choix de ces contraintes (on prend, bien sûr, le meilleur m possible) :

- $l + 1 = 2, m = 1 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^1} \leq c|v|_{H^2},$
- $l + 1 = 3, m = 2 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^2} \leq c|v|_{H^3}.$

3.4.3 Cas des éléments d'Argyris

Dans ce dernier cas, $\hat{\Pi}v$ n'est bien défini que si v est de classe \mathcal{C}^2 , donc pour des v de H^{l+1} avec $l + 1 \geq 3$. Comme on a :

$$\hat{\Pi}(p) = p \quad \text{pour tout } p \in P_6 ,$$

on doit avoir aussi $l \leq 6$. Nous avons donc cinq possibilités :

- $l + 1 = 3, m = 2 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^2} \leq c|v|_{H^3},$
- $l + 1 = 4, m = 3 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^3} \leq c|v|_{H^4},$
- $l + 1 = 5, m = 4 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^4} \leq c|v|_{H^5},$
- $l + 1 = 6, m = 5 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^5} \leq c|v|_{H^6},$
- $l + 1 = 7, m = 6 : \|v - \hat{\Pi}v\|_{H^6} \leq c|v|_{H^7}.$

3.5 Erreurs d'interpolation sur un intervalle quelconque

Nous allons maintenant obtenir une estimation analogue sur un intervalle I quelconque ; ces estimations vont dépendre de la taille $h = h(I)$ de l'intervalle.

Comme sur \hat{I} , on introduit un opérateur d'interpolation linéaire continu $\Pi : H^{l+1}(I) \rightarrow H^m(I)$ avec $0 \leq m \leq l$ tel que :

$$\Pi(p) = p \quad \text{pour tout } p \in P_l .$$

Enfin, il existe une transformation affine bijective $F : \hat{I} \rightarrow I$ que l'on peut expliciter : comme $\hat{I} = [0, 1]$, si $I = [a, b]$, on a :

$$x = F(\hat{x}) = (b - a)\hat{x} + a = h\hat{x} + a .$$

Dans cette formule, on a noté x et \hat{x} les deux points de I et \hat{I} en correspondance via F et nous noterons toujours avec un “ $\hat{}$ ” les éléments faisant référence à \hat{I} et les autres sans ce signe distinctif.

Si v est une fonction définie sur I , on lui associe \hat{v} définie sur \hat{I} par :

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x) \quad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{I} .$$

Cette définition permet de définir un opérateur d'interpolation sur \hat{I} en posant :

$$\hat{\Pi}\hat{v} = \widehat{\Pi v} \quad \text{pour tout } \hat{v} \in H^{l+1}(\hat{I}) .$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Pour $h \leq 1$, il existe une constante $c(m, l+1)$ telle que :*

$$\|v - \Pi v\|_{H^m} \leq ch^{l+1-m} |v|_{H^{l+1}} \quad \text{pour tout } v \in H^{l+1}(I) .$$

Cette formule montre comment l'estimation dépend de la taille de l'intervalle I ainsi que de l et de m : comme on peut s'y attendre, pour h petit, l'erreur est d'autant meilleure que l'ordre d'interpolation l est élevé mais elle est de moins en moins bonne quand on essaie de la mesurer avec des normes H^m où m est de plus en plus grand.

Preuve : elle est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $w \in H^n(I)$. Alors :*

$$\|\hat{w}^{(n)}\|_{L^2(\hat{I})} = h^{(n-1/2)} \|w^{(n)}\|_{L^2(I)} .$$

Preuve du lemme : comme $\hat{w}(\hat{x}) = w(h\hat{x} + a)$, on a $\hat{w}^{(n)}(\hat{x}) = h^n w^{(n)}(h\hat{x} + a)$. Il en résulte que :

$$\|\hat{w}^{(n)}\|_{L^2(\hat{I})}^2 = h^{2n} \int_0^1 |w^{(n)}(h\hat{x} + a)|^2 d\hat{x} .$$

On effectue alors le changement de variable $x = h\hat{x} + a$:

$$\|\hat{w}^{(n)}\|_{L^2(\hat{I})}^2 = h^{2n-1} \int_a^b |w^{(n)}(x)|^2 dx ,$$

ce qui donne bien le résultat annoncé. □

On termine maintenant la preuve du théorème :

$$\begin{aligned} \|v - \Pi v\|_{H^m}^2 &= \sum_{n=0}^m \|(v - \Pi v)^{(n)}\|_{L^2(I)}^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^m h^{1/2-n} \|(\hat{v} - \widehat{\Pi v})^{(n)}\|_{L^2(\hat{I})}^2 \end{aligned}$$

d'après le lemme. Comme $\widehat{\Pi v} = \hat{\Pi}\hat{v}$, d'après l'erreur d'interpolation sur \hat{I} , le second membre est estimé par :

$$\sum_{n=0}^m h^{1/2-n} c_n \|\hat{v}^{(l+1)}\|_{L^2(\hat{I})}^2 ,$$

puisque $|\hat{v}|_{H^{l+1}} = \|\hat{v}^{(l+1)}\|_{L^2(\hat{I})}^2$. En écrivant ce terme de cette manière, on peut ré-utiliser le lemme pour obtenir une majoration par :

$$\sum_{n=0}^m c_n h^{l+1-n} |\hat{v}|_{H^{l+1}}^2.$$

Si $h \leq 1$, on majore chaque terme h^{l+1-n} par h^{l+1-m} , ce qui donne le résultat. \square

Après avoir étudié séparément ce qui se passe sur chaque intervalle, on doit étudier les “raccords”. La question naturelle est la suivante : si $[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{K_h} I_k^h$ et si on note Π_k^h l'opérateur d'interpolation sur I_k^h , à quelle condition l'interpolée globale définie par :

$$\Pi^h v(x) = \Pi_k^h(x) \quad \text{si } x \in I_k^h,$$

est-elle dans $H^1(]0, 1[)$ si $v \in H^{l+1}(]0, 1[)$?

La réponse est donnée par la :

Proposition 3.1. *Soient $a < b < c$ trois réels et soient $v \in H^1(]a, b[)$ et $\tilde{v} \in H^1(]b, c[)$. On suppose que $v(b) = \tilde{v}(b)$. alors la fonction w définie sur $[a, c]$ par :*

$$w(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ \tilde{v}(x) & \text{si } x \in [b, c] \end{cases}$$

est dans $H^1(]a, c[)$.

Par conséquent, un raccord continu sur l'intersection de deux intervalles (typiquement, un point) suffit à assurer que l'interpolée va être H^1 sur la réunion des deux intervalles. La preuve de ce résultat est presque évidente en dimension 1 car il suffit d'utiliser le fait que v et \tilde{v} sont donnés par des intégrales.

Il en résulte, de manière immédiate, la :

Proposition 3.2. *La fonction $\Pi^h v$ définie par :*

$$\Pi^h v(x) = \Pi_k^h v(x) \quad \text{si } x \in I_k^h,$$

est dans $H^1(]0, 1[)$ si :

- $v \in H^1(]0, 1[)$ dans le cas des éléments de Lagrange,
- $v \in H^2(]0, 1[)$ dans le cas des éléments de Hermite,
- $v \in H^3(]0, 1[)$ dans le cas des éléments d'Argyris,
- $v \in H^1(]0, 1[)$ dans le cas des éléments intégraux.

3.5.1 Retour sur l'estimation de $u - u_h$

On suppose, dans cette section, que l'on est dans les conditions d'applications de la section précédente, *i.e.* la fonction $\Pi^h v$ qui coïncide avec $\Pi_k^h v$ sur chaque intervalle I_k^h est dans $H^1(]0, 1[)$ si $v \in H^{l+1}(]0, 1[)$ -ce qui, nous l'avons vu, est presque automatique- .

Le résultat est le suivant :

Théorème 3.5. *Si la solution u du problème est dans $H^{l+1}(]0, 1[)$ et si la méthode d'éléments finis est associée à des opérateurs d'interpolation continus de $H^{l+1}(I_k^h)$ dans $H^1(I_k^h)$ et tels que $\hat{\Pi}_k p = p$ pour tout $p \in P_l$, pour tout h et k , on a :*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \bar{c} h^l |u|_{H^{l+1}},$$

où $h := \max_k h(I_k^h)$.

De nombreuses remarques peuvent être faites sur ce résultat qui rassemble les informations collectées au cours des sections précédentes :

1. L'ordre de convergence en h^l est d'autant plus élevé que l'ordre d'interpolation est grand MAIS à condition que la régularité de la solution soit suffisante. On retrouve une règle déjà rencontrée dans la première partie : il y a des faits incontournables qu'aucune méthode ne parviendra jamais à éviter...

On verra plus loin que l'ordre de convergence pour les dérivées de u (ordre l) est moins bon que celui pour la fonction elle-même (ordre $l + 1$ pour la norme L^2 de $u - u_h$). Ici aussi on se heurte à un des fondamentaux...

2. On obtient un ordre de convergence en :

- $O(h)$ dans le cas des éléments de Lagrange,
- $O(h^3)$ dans le cas des éléments de Hermite,
- $O(h^6)$ dans le cas du intervalle d'Argyris.

Preuve : On commence par l'estimation H^1 . D'après le résultat fondamental :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1} &\leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - \hat{\Pi}u\|. \end{aligned}$$

Au passage, ici, on utilise que $V_h \subset V = H_0^1(]0, 1[)$. Or, en utilisant et en simplifiant un peu les expressions obtenus lors de l'estimation d'interpolation, on a :

$$\begin{aligned} \|u - \hat{\Pi}u\|_{H^1}^2 &= \sum_{k=1}^{K_h} \|u - \hat{\Pi}_k u\|_{H^1(T_k^h)}^2 \\ &\leq \bar{C} \sum_{k=1}^{K_h} [h(I_k^h)]^{2l} |u|_{H^{l+1}(T_k^h)}^2 \end{aligned}$$

La définition de h nous permet de simplifier cette expression qui s'estime par :

$$\tilde{C}h^{2l} \sum_{k=1}^{K_h} |u|_{H^{l+1}(T_k^h)}^2 = \tilde{C}h^{2l} |u|_{H^{l+1}([0,1])}^2 ,$$

avec une constante \tilde{C} adaptée. \square

Terminons par l'estimation L^2 annoncée ; pour cela, on suppose que le problème adjoint (qui est ici le même que le problème initial puisqu'il est auto-adjoint) :

Trouver $v \in H_0^1(]0,1[)$ tel que :

$$a(w, v) = \langle g, w \rangle \text{ pour tout } w \in H_0^1(]0,1[)$$

admet une solution pour tout $g \in L^2(]0,1[)$, que la solution v est dans $H^2(]0,1[)$ et que :

$$\|v\|_{H^2} \leq C \|g\|_{L^2} ,$$

pour une certaine constante C .

Alors on a le :

Théorème 3.6. *Sous les hypothèses du Théorème 3.5 et celles sur le problème-adjoint, on a :*

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \bar{c}h^{l+1} |u|_{H^{l+1}} .$$

Preuve : Soit v la solution du problème adjoint associé à $g \in L^2(]0,1[)$. On a :

$$\langle g, u - u_h \rangle = a(u - u_h, v) = a(u - u_h, v - v_h) ,$$

pour tout $v_h \in V_h$ puisque $a(u, v_h) = a(u_h, v_h)$. Il en résulte :

$$\langle g, u - u_h \rangle \leq \|u - u_h\|_{H^1} \|v - v_h\|_{H^1} .$$

On remarque que comme $l \geq 1$, V_h contient le sous-espace V_h^1 formé des fonctions qui sont P_1 sur chaque intervalle avec un raccord continu. En répétant la preuve des résultats d'interpolation, on montre facilement que :

$$\inf_{v_h \in V_h^1} \|v - v_h\|_{H^1} \leq C_1 h |v|_{H^2} .$$

Et donc :

$$\langle g, u - u_h \rangle \leq \|u - u_h\|_{H^1} \|v - v_h\|_{H^1} \leq \bar{c}h^l |u|_{H^l} C_1 h |v|_{H^2} .$$

Il suffit alors d'estimer $|v|_{H^2}$ par $C \|g\|_{L^2}$ grâce à la régularité du problème adjoint pour conclure en prenant $g = u - u_h$. \square

Dernière question à évoquer : ces résultats de convergence ne s'appliquent que si u est au minimum dans H^2 . Que se passe-t-il si u est seulement H^1 ?

Théorème 3.7. *Sous les hypothèses du Théorème 3.5 :*

$$\lim_{h \downarrow 0} \|u - u_h\|_{H_0^1} = 0 .$$

Preuve : On se souvient que :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) ,$$

mais pour estimer la distance, on va raisonner par densité : il existe une suite $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ de fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact qui converge vers u dans H^1 et, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \varphi_\varepsilon\|_{H^1} + \frac{M}{\alpha} d(\varphi_\varepsilon, V_h) .$$

Comme φ_ε est dans tous les H^{l+1} , pour ε fixé, $d(\varphi_\varepsilon, V_h)$ tend vers 0 et on a même une estimation précise de cette convergence. En jouant sur ε , on obtient facilement le résultat. \square

3.6 Exercices

Bibliographie

- [1] P.G. Ciarlet : INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET À L'OPTIMISATION ,Collection "Mathématiques appliquées pour la Maîtrise", Masson,1988.
- [2] P. Ciarlet, B. Miara & J.M. Thomas EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET D'OPTIMISATION ,Collection "Mathématiques appliquées pour la Maîtrise", Masson,1988.
- [3] Kolmogorov & Fomine ,Ellipses, ?
- [4] P.A. Raviart INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ,Collection "Mathématiques appliquées pour la Maîtrise", Dunod, .
- [5] Sainsaulieu ? , Dunod?.
- [6] Zuily & H. Quéffelec : ELÉMENTS D'ANALYSE POUR L'AGRÉGATION , Masson?.