Revue de la Filière Mathématiques
RMS

[Table des matières]

Agrégation interne

Deuxième Épreuve, 2014

Agrégation

7047

Solution de la RMS

Partie I : une démonstration probabiliste du théorème de Weierstrass

1. S_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernouilli de paramètre x, donc S_n suit la loi binomiale de paramètres n et x : $\mathbb{P}(S_n = k) = B_{k,n}(x)$.

2. ***a)*** Étant la probabilité d'un événement, $B_{k,n}(x)$ est compris entre 0 et 1.

b) Posons $Y_i = 1 - X_i$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et notons U_n la somme des Y_i ; Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - x$ et les Y_i sont indépendantes. Les événements $(S_n = k)$ et $(U_n = n - k)$ sont identiques ; leurs probabilités, $B_{k,n}(x)$ pour le premier et $B_{n-k,n}(1 - x)$ pour le deuxième, sont donc égales.

c) Soit X une variable aléatoire X de Bernoulli de paramètre x. Son espérance mathématique est $x \times 1 + (1 - x) \times 0 = x$; sa variance est $\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X)(1 - \mathrm{E}(X))$ (car $X^2 = X$), donc $\mathrm{V}(X) = x(1 - x)$.

La distribution de S_n est donnée par $p_k := \mathbb{P}(S_n = k) = B_{k,n}(x)$ pour tout k de $[\![0,n]\!]$.

La somme de ces p_k est 1, donc

$$i. \qquad \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = 1.$$

L'espérance mathématique de S_n est la somme des kp_k ; mais c'est aussi la somme des espérances mathématiques des X_i, donc nx. Ainsi

$$ii. \qquad \sum_{k=0}^{n} kB_{k,n}(x) = nx.$$

Comme on voit de voir que $\mathrm{E}(S_n) = nx$, la variance de S_n est la somme des $(k - nx)^2 p_k$; mais c'est aussi la somme des variances des X_i puisque ces dernières sont indépendantes. Ainsi $\mathrm{V}(S_n) = nx(1 - x)$, et :

$$iii. \qquad \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 B_{k,n}(x) = nx(1 - x).$$

3. Par définition S_n est la somme des variables aléatoires S_{n-1} et X_n, qui sont indépendantes. Pour $1 \leq k \leq n$, l'événement $(S_n = k)$ est la réunion des événements disjoints $((S_{n-1} = k)$ et $(X_n = 0))$ et $((S_{n-1} = k)$ et $(X_n = 1))$. On a donc

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-1} = k)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(S_{n-1} = k - 1)\mathbb{P}(X_n = 1).$$

Ainsi les polynômes $B_{k,n}$ et $(1-X)B_{k,n-1} + XB_{k-1,n-1}$ prennent même valeur en tout réel compris entre 0 et 1. L'ensemble [0,1] est infini donc

$$B_{k,n} = (1-X)B_{k,n-1} + XB_{k-1,n-1}.$$

L'événement $(S_n = 0)$ est aussi $((S_{n-1} = 0)$ et $(X_n = 0))$; donc, pour tout x réel compris entre 0 et 1, $B_{0,n}(x) = (1-x)B_{0,n-1}(x)$. Ainsi

$$B_{0,n} = (1-X)B_{0,n-1}.$$

4. ***a)*** Pour n fixé, le système des $B_{k,n}$ a pour cardinal la dimension de $\mathbf{C}_n[X]$. Pour montrer que $(B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$, il suffit de prouver que c'est un système libre.

Pour tout k de $[[0,n]]$, la valuation de $B_{k,n}$ est k ; ainsi $B_{k,n}$ n'est pas combinaison linéaire de $B_{k+1,n}, B_{k+2,n}, \ldots, B_{n,n}$. Par récurrence descendante finie sur $k = n, n-1, n-2, \ldots, 0$, $(B_{k,n}, B_{k+1,n}, \ldots, B_{n,n})$ est donc libre ; pour $k = 0$ c'est ce qu'il faut.

b) On identifie ici polynôme et fonction polynomiale sur [0,1]. En raison de la liberté de $(B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{n,n})$, le noyau de B_n est l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}_0$ telles que $f(k/n) = 0$ pour tout k de 0 à n. Si f est polynomiale de degré au plus n et $B_n(f) = 0$ alors, ayant $n+1$ zéros, f est la fonction nulle. Ainsi $(Ker B_n) \wedge (\mathbf{C}_n[X]) = \{0\}$ et comme $B_n(\mathbf{C}_n[X]) \subset \mathbf{C}_n[X]$ et que $\mathbf{C}_n[X]$ est de dimension finie, B_n induit un automorphisme linéaire $\overline{B_n}$ de $\mathbf{C}_n[X]$.

c) Soit P un polynôme complexe. Soit n un entier au moins égal à $\deg P$. Le polynôme $\overline{B_n}^{-1}(P)$ vérifie $B_n(Q) = P$. Les autres solutions sont les $Q+R$ où R est un multiple de $X(X-1/n)\cdots(X-(n-1)/n)(X-1)$.

5. L'ensemble des valeurs de T_n est $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$. On a

$$\mathbb{P}(T_n = k/n) = \mathbb{P}(S_n = k) = B_{k,n}(x).$$

L'espérance de $f(T_n)$ est donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{k,n}(x) f(k/n) = (B_n(f))(x)$.

Mais $E(T_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = x$; on en déduit

$$\mathbb{E}(f(T_n)) - f(\mathbb{E}(T_n)) = (B_n(f))(x) - f(x).$$

6. On retrouve ici l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans un cas particulier.

Reprenons d'abord l'inégalité de Markov. Soit X une variable aléatoire réelle dont l'ensemble des valeurs est fini. Soit $a > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \sum_{t \in X(\Omega): t \geqslant a} \mathbb{P}(X = t) \leqslant \frac{1}{a} \sum_{t \in X(\Omega)} t\mathbb{P}(X = t) = \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Posons $Y = (X - E(X))^2$ et appliquons ce qui précède à Y avec $a = \delta^2$ où $\delta > 0$. On a $E(Y) = V(X)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \delta) = \mathbb{P}(Y \geqslant \delta^2) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\delta^2}.$$

On a $E(T_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = x$ et $V(T_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(|T_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Le maximum de $x(1-x)$ sur [0,1] est 1/4. Donc

$$\mathbb{P}(|T_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

7. Notons $t_1, t_2, \ldots, t_m$ les valeurs prises par X ; posons $p_i = P(X = t_i)$ pour tout i. Les p_i sont positifs et leur somme vaut 1.

Comme φ est convexe, l'épigraphe de φ est convexe. Le barycentre des points $(t_i,\varphi(t_i))$ de son graphe pour les coefficients p_i est dans l'épigraphe. C'est dire que

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} p_i t_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i \varphi(t_i).$$

Ainsi

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Remarque. Si X est à valeurs complexes, gardant les mêmes notations mais avec des t_i complexes, on a $|\sum_{i=1}^{m} p_i t_i| \leq \sum_{i=1}^{m} p_i|t_i|$, donc $|E(X)| \leq E(|X|)$. On utilisera ceci dans la question suivante.

8. Cette question utilise le théorème de Heine. Pour tout $\delta > 0$, $\delta \leq 1$, notons $\mu(\delta)$ la borne supérieure des $|f(x) - f(y)|$ où x et y sont des éléments de $[0,1]$ tels que $|x - y| \leq \delta$. Étant continue sur le segment $[0,1]$, f y est uniformément continue, ce qui revient à dire que $\mu(\delta)$ tend vers 0 avec δ.

On a $(B_n(f))(x) - f(x) = E(f(T_n) - f(x))$. D'après la remarque du 7),

$$|\mathbb{E}(f(T_n) - f(x))| \leqslant \mathbb{E}(|f(T_n) - f(x)|).$$

Donnons-nous $\delta \in]0,1]$. Si $|T_n - x| < \delta$ alors $|f(T_n) - f(x)| \leq \mu(\delta)$; sinon on utilise seulement ce qui est toujours vrai : $|f(T_n) - f(x)| \leq \mu(1)$. Ainsi

$$|\mathbb{E}(f(T_n) - f(x))| \leqslant \mu(\delta)\mathbb{P}(|T_n - x| < \delta) + \mu(1)\mathbb{P}(|T_n - x| \geqslant \delta).$$

On exploite le 6) et on majore $\mathbb{P}(|T_n - x| < \delta)$ par 1. Alors

$$|(B_n(f))(x) - f(x)| \leqslant \mu(\delta) + \frac{\mu(1)}{4n\delta^2}.$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $\mu(\delta)$ soit plus petit que $\varepsilon/2$. Pour tout $n \geq \frac{\mu(1)}{2\varepsilon\delta^2}$, on a alors $|B_n(f))(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. C'est dire que $B_n(f)$ tend uniformément vers f.

9. Posons $f(t) = g((1 - t)a + tb)$. La fonction f est continue sur $[0,1]$; donc la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f. Posons $P_n(x) = (B_n(f))((x - a)/(b - a))$; la suite (P_n) de fonctions polynomiales converge uniformément sur $[a,b]$ vers g.

10. Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur R.

Nécessairement la suite $(P_{n+1} - P_n)$ tend uniformément vers 0, donc la fonction $P_{n+1} - P_n$ est bornée à partir d'un certain rang n_0. Les polynômes constants sont les seuls qui sont bornés sur R. Ainsi il existe un polynôme Q tel que $P_n(x) = Q(x) + c_n$ pour tout $n \geq n_0$ où (c_n) est une suite complexe. La suite (c_n) converge vers un complexe c et (P_n) tend vers $Q + c$ uniformément. Ainsi les seules fonctions continues qui sont limites uniformes sur R d'une suite de polynômes sont les polynômes.

Partie II : Approximation des fonctions hölderiennes

A) Généralités sur les fonctions hölderiennes

11. Soit $0 < \alpha \leq 1$; notons θ_α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Cette fonction θ_α est continue sur $[0, 1]$ et elle est croissante.

Soit $h \in]0, 1[$. Posons $g(x) = (x + h)^\alpha - x^\alpha$ pour tout x de $[0,1 - h]$. Dérivons g ; il vient $g'(x) = \alpha((x + h)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1})$; g' est négative, donc g est décroissante et $g(x) \leq g(0)$ pour tout x entre 0 et $1 - h$. Ainsi $(x + h)^\alpha - x^\alpha \leq h^\alpha$.

Donc si $0 \leq x < y \leq 1$ et $y - x < 1$ alors $0 \leq \theta_\alpha(y) - \theta_\alpha(x) \leq (y - x)^\alpha$; c'est vrai aussi si $y - x = 1$, soit $x = 0$ et $y = 1$. Donc θ_α est dans Lip_α.

La fonction nulle est dans Lip_α avec $L = 0$. Soit f et g dans Lip_α et λ dans **C**. Soit L un réel tel que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, L' un réel tel que $|g(x) - g(y)| \leq L'|x - y|^\alpha$.

Pour tous x, y, $|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| \leq |\lambda| L(f) |x - y|^\alpha$ donc λf est dans Lip_α ; de plus

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqslant (L + L')|x - y|^\alpha$$

et $f + g$ est dans Lip_α. Ainsi Lip_α est un espace vectoriel réel.

12. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{C}$; on notera H_f l'ensemble des α de $]0,1]$ tels que f est dans Lip_α.

Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ et x,y dans $[0,1]$ alors $|x - y|^\beta \leq |x - y|^\alpha$ donc si $f \in Lip_\beta$ alors f est dans Lip_α. Ainsi, si β est contenu dans H_f, alors $]0,\beta]$ est inclus dans H_f.

Dire que H_f est vide, c'est dire que f n'est pas höldérienne ; on en parlera dans la question suivante. Sinon notons α_0 la borne supérieure des α tels que f est α-hölderienne. Si f est α_0-hölderienne, alors H_f est l'intervalle $]0,\alpha_0]$. Sinon α_0 n'est pas dans H_f ; soit α dans $]0,\alpha_0[$; par définition d'une borne supérieure, il existe β dans H_f tel que $\alpha < \beta < \alpha_0$ et comme $]0,\beta]$ est inclus dans H_f, α est dans H_f ; ainsi H_f est l'intervalle ouvert $]0,\alpha_0[$.

On distingue donc trois cas.

- ou bien f n'est pas höldérienne ;
- ou bien il existe α_0 tel que $0 < \alpha_0 \leq 1$ et f est α-höldérienne si et seulement si $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Notamment si $\alpha_0 = 1$, f est lipschitzienne.
- ou bien il existe α_0 tel que $0 < \alpha_0 \leq 1$ et f est α-höldérienne si et seulement si $0 < \alpha < \alpha_0$.

13. Une fonction $\mathcal{C}^1$ est lipschitzienne donc α-höldérienne pour tout α de $]0,1]$.

Une fonction α-höldérienne est continue ; en effet l'inégalité $|f(y) - f(x)| = L|y - x|^\alpha$ montre que $f(y)$ tend vers $f(x)$ quand y tend vers x. Donc $\mathcal{C}^1 \subset Lip_\alpha \subset \mathcal{C}^0$.

La fonction $x \mapsto |x - 1/2|$ n'est pas dérivable en $1/2$; elle n'est donc pas $\mathcal{C}^1$. Elle est lipschitzienne donc α-höldérienne pour tout α.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+|\ln x|}$ complétée par la valeur 0 en 0 est continue sur $[0,1]$. Pour tout $\alpha > 0$, $x^{-\alpha} f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Donc il n'existe pas $L > 0$ tel que $|f(x) - f(0)| \leq Lx^\alpha$ pour tout x et f n'est pas α-höldérienne.

On a montré que $\mathcal{C}^1$ est strictement inclus dans $\cap_{\alpha>0} Lip_\alpha$ et que $\cup_{\alpha>0} Lip_\alpha$ est strictement inclus dans $\mathcal{C}^0$.

B) Une majoration de l'erreur

14. Toute fonction höldérienne est continue ; le 8) s'applique.

15. On a $g(x) - B_n(g)(x) = \mathrm{E}(g(x) - g(T_n))$. D'après la remarque du 7),

$$|g(x) - B_n(g)(x)| \leqslant \mathbb{E}(|g(x) - g(T_n)|).$$

Comme $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, on a $\mathrm{E}(|g(x) - g(T_n)|) \leq L\,\mathrm{E}(|x - T_n|^\alpha)$. Donc

$$|g(x) - B_n(g)(x)| \leqslant L\mathbb{E}(|x - T_n|^\alpha).$$

16. ***a)*** Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels positifs et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des réels strictement positifs. Posons $s = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$,

$$b = \frac{y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_n a_n}{s} \text{ et } c = \frac{y_1 g(a_1) + y_2 g(a_2) + \cdots y_n g(a_n)}{s}.$$

Si $a_1 = \cdots = a_n$ alors $b = a_1$, $c = g(a_1)$ donc $g(b) = c$. On veut prouver que, sinon, $g(b) > c$. Posons, pour tout i, $s_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_i$,

$$b_i = \frac{y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_i a_i}{s_i} \text{ et } c_i = \frac{y_1 g(a_1) + y_2 g(a_2) + \cdots y_i g(a_i)}{s_i}.$$

On a en particulier $s = s_n$, $b = b_n$ et $c = c_n$. On a, pour $i \in [[1,n-1]]$,

$$b_{i+1} = \frac{s_i b_i + y_{i+1} a_{i+1}}{s_i + y_{i+1}} \text{ et } c_{i+1} = \frac{s_i c_i + y_{i+1} g(a_{i+1})}{s_i + y_{i+1}}.$$

Notons (H_i) la propriété : «$c_i > g(b_i)$ sauf si $a_1 = a_2 = \cdots = a_i$ ».

(H_1) est claire. Soit $i < n$, $i \geq 1$; supposons H_i établi. Alors $c_i \geq g(b_i)$ dans tous les cas, donc, g étant concave $c_{i+1} \geq \frac{s_i g(b_i) + y_{i+1} g(a_{i+1})}{s_i + y_{i+1}} \geq g(b_{i+1})$. Mais de plus g est strictement concave ; pour avoir $c_{i+1} = g(b_{i+1})$ il faut $g(b_i) = c_i$ et $a_{i+1} = b_i$; la première condition force $a_1 = a_2 = \cdots = a_i$, d'où $b_i = a_1$ et la deuxième donne alors $a_{i+1} = a_1$. On a effectué la transmission $(H_i) \Rightarrow (H_{i+1})$. Ainsi (H_n) est établi et c'est le résultat annoncé.

On introduit maintenant $h(x,y) = yg(x/y)$ et on pose $x_i = a_i y_i$ pour tout i.

Ainsi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_n a_n = sb$,

$$h(x_1, y_1) + h(x_2, y_2) + \cdots + h(x_n, y_n) = y_1 g(a_1) + y_2 g(a_2) + \cdots y_n g(a_n) = sc.$$

On a $h(sb, s) = sg(b) > sc$ sauf si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. C'est le résultat voulu.

b) D'après les hypothèses sur p et q, on a $p > 1$ et $q > 1$. La fonction $g : x \mapsto x^{1/p}$ est strictement concave et le a) s'applique. La fonction h est donnée par $h(x,y) = x^{1/p} y^{1-(1/p)} = x^{1/p} y^{1/q}$.

Posons $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^{1/p} y_i^{1/q}$, $B = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{1/p}$, $C = (\sum_{i=1}^{n} y_i)^{1/q}$.

On a montré que, pour tous $x_1,\ldots,x_n$ positifs et $y_1,\ldots,y_n$ strictement positifs, $A \leq BC$, et que $A = BC$ si et seulement s'il existe a réel tel que $x_i = ay_i$ pour tout i.

Supposons maintenant les y_i positifs mais peut-être nuls. L'inégalité $A \leq BC$ s'étend par continuité mais la gestion du cas d'égalité est plus délicate.

Notons I l'ensemble des i tels que $x_i > 0$ et J l'ensemble des i tels que $y_i > 0$. On a

$$A = \sum_{i \in I \cap J} x_i^{1/p} y_i^{1/q}, \quad B = \big(\sum_{i \in I} x_i\big)^{1/p}, \quad C = \sum_{i \in J} (y_i)^{1/q}.$$

Si I ou J est vide alors $A = BC = 0$.

Si I et J sont non vides et disjointes, alors $A = 0$ et $BC > 0$ donc $A < BC$.

Si $I \cap J$ est non vide alors, comme (d'après ce qui précède) $A \leq B'C'$ où $B' = \sum_{i \in I \cap J} x_i^{1/p}$, $C' = \sum_{i \in I \cap J} y_i^{1/q}$, que $B' \leq B$ et $C' \leq C$ on a $A \leq BC$. Si de plus $I \neq J$ alors $B' < B$ ou $C' < C$ et comme $B' > 0$ et $C' > 0$ on a $B'C' < BC$ donc $A < BC$. Si $I = J$ alors $A = BC$ si et seulement si il existe $a > 0$ tel que $x_i = ay_i$ pour tout $i \in I$, et donc en fait pour tout i de 1 à n. On peut remarquer que si $I \neq J$ et que I et J ne sont pas vides, alors il ne peut exister $a > 0$ tel que $x_i = ay_i$ pour tout i de 1 à n.

On a montré que, $X := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y := (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ étant des éléments de R_+^n, on a toujours

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{1/p} y_i^{1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/q}$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $(X = 0)$ ou $(Y = 0)$ ou ($X = aY$ pour un certain $a > 0$).

Posons alors, avec les notations de l'énoncé, $x_k = |u_k|^p$ et $y_k = |v_k|^q$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}|u_k||v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q\right)^{1/q}.$$

et il y a égalité si et seulement si (tous les u_k sont nuls) ou (tous les v_k sont nuls) ou (il existe $a > 0$ tel que $|u_k|^p = a|v_k|^q$ pour tout k.

17. Posons ici $p_k = \mathbb{P}(T_n = \frac{k}{n})$. Par définition $E(|x - T_n|^\alpha) = \sum_{k=1}^{n} p_k|x - \frac{k}{n}|^\alpha$. On applique le 16)b) avec

$$u_k = p_k^{\alpha/2}\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha, \quad v_k = p_k^{1-\alpha/2}, \quad p = 2/\alpha, \quad q = \frac{1}{1-\alpha/2}$$

(on a bien $p > 1$ et $q > 1$). Il vient

$$\mathbb{E}\left(|x - T_n|^\alpha\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\left|x - \frac{k}{n}\right|^2\right)^{\alpha/2}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{1-\alpha/2}.$$

C'est dire que $E(|x - T_n|^\alpha) \leq (\mathbb{E}\left(|x - T_n|^2\right))^{\alpha/2}$.

18. Au 15) nous avons $|g(x) - B_n(g)(x)| \leq LE(|x - T_n|^\alpha)$. Avec le 17), on obtient

$$|g(x) - B_n(g)(x)| \leqslant L\left(\mathbb{E}\left(|x - T_n|^2\right)\right)^{\alpha/2}.$$

Mais comme x est l'espérance de T_n, $E(|x - T_n|^2)$ n'est autre que la variance de T_n, qui est $\frac{x(1-x)}{n}$. Ainsi $|g(x) - B_n(g)(x)| \leq L\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\alpha/2}$. On majore le second membre par $\frac{1}{4n}$ et donc, en passant au sup : $\|g - B_n(g)\|_\infty \leq L(4n)^{-\alpha/2}$.

19. D'après 18) on a un majorant explicite : $e_n(L,\alpha) \leq (L4^{-\alpha/2})n^{-\alpha/2}$.

20. ***a)*** La fonction k_n est paire et nulle en 0. D'abord $(k_n(0))$ tend vers 0. Pour $x > 0$, $(k_n(x))$ tend vers $\frac{\pi x}{2}$. La fonction limite k est paire, donc $k(x) = \frac{\pi|x|}{2}$.

b) On a $\frac{\pi}{2}$ -$Arctan y$ = $Arctan\frac{1}{y}$ pour tout $y > 0$. Donc $k(x) - k_n(x) = |x| Arctan\frac{1}{|nx|}$ pour tout x non nul. La fonction $Arctan$ est concave sur $[0,+\infty[$ car sa dérivée $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ y est décroissante. La fonction $y \mapsto \frac{Arctan\, y}{y}$ décroît donc sur $]0,+\infty[$, et admet 1 pour limite en 0. Ainsi $0 \leq Arctan y \leq y$ pour tout $y \geq 0$ et $0 \leq k(x) - k_n(x) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x > 0$.

C'est vrai aussi pour $x < 0$ avec la parité et pour $x = 0$ car $k(0) - k_n(0) = 0$. Ainsi $\|k - k_n\|_\infty$, majoré par $\frac{1}{n}$, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et la convergence est uniforme.

c) La fonction k n'est pas dérivable en 0 ; elle y possède des dérivées à gauche et à droite opposées : $-\pi/2$ et $\pi/2$. Par contre chaque k_n est dérivable sur R.

21. La fonction q_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, sa dérivée étant donnée par $q'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. La limite de la suite $(q'_n(x))$ est 1 si $x = 0$ et 0 si $0 < x \leq 1$. D'autre part la fonction q_n est positive, croît sur $[0, 1/n]$ puis décroît. Ainsi $\|q_n\|_\infty = q_n(1/n) = 1/(2n)$. Il en résulte que (q_n) tend uniformément vers la fonction nulle. La dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle et n'est pas la limite de (q'_n).

22. Posons $y = x(1 - x)$. La fonction φ s'exprime en fonction de y : $\varphi(x) = P(y)$ où $P(y) = y(x^3 + (1 - x)^3) = y(1 - 3y)$. Le graphe de P est une parabole dont le sommet est obtenu pour $y = 1/6$, et $P(1/6) = 1/12$; c'est un majorant de P donc $\varphi(x) \leq 1/12$. En fait c'est son maximum car l'équation en x : $x(1 - x) = 1/6$ admet des racines réelles.

23. ***a)*** Posons $A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^4$. On a $A = \sum_{(i,j,k,l)\in[[1,n]]^4} a_i a_j a_k a_l$.

On peut écrire $A = B + C + D$, où B est la somme des termes tels que $i = j = k = l$, C est la somme des termes tels que ($i = j$, $k = l$ et $i \neq k$) et D est la somme des autres termes. L'ensemble I est donc donné par

«il y a au moins parmi i,j,k,l un indice différent des trois autres ».
Le terme a_i^4 apparaît une et une seule fois dans cette somme ; le terme $a_i^2a_j^2$ où $i < j$ apparaît exactement six fois car c'est le nombre de suites de quatre éléments dont deux valent i et les deux autres valent j. Ainsi

$$A = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^4 + 6 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i^2 a_j^2 + \sum_{(i,j,k,\ell)\in I} a_i a_j a_k a_\ell.$$

b) Posons $Y_i = X_i - x$. Les Y_i sont des variables aléatoires centrées indépendantes. On en déduit que, pour tous entiers naturels a,b,c,d,

$$\mathbb{E}(Y_i^a Y_j^b Y_k^c Y_\ell^d) = \mathbb{E}(Y_i^a)\mathbb{E}(Y_j^b)\mathbb{E}(Y_k^c)\mathbb{E}(Y_\ell^d)$$

et que cette espérance est nulle si au l'un moins des exposants a,b,c,d est égal à 1. On en déduit avec a) que $E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)^4 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} E(Y_i^4) + 6 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} E(Y_i^2 Y_j^2)$.

En observant que $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ n'est autre que $n(T_n - x)$ on obtient le résultat souhaité.

c) Par calcul direct,

$$\mathbb{E}((X_i - x)^4) = \mathbb{P}(X_i = 0)(0-x)^4 + \mathbb{P}(X_i = 1)(1-x)^4 = (1-x)x^4 + x^4(1-x).$$

Ainsi $E((X_i - x)^4) \leq 1/12$ d'après 22). Puis, pour $i < j$,

$$\mathbb{E}((X_i - x)^2(X_j - x)^2) = \mathbb{E}((X_i - x)^2)\mathbb{E}((X_j - x)^2) = \mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j) = x^2(1-x)^2.$$

Comme $x(1 - x) \leq 1/4$ on a $E((X_i - x)^2(X_j - x)^2) \leq 1/16$.

d) Avec b) et c), il vient $n^4E((T_n - x)^4) \leq \frac{n}{12} + \frac{3n(n-1)}{16}$. Ainsi

$$\mathbb{E}((T_n - x)^4) \leqslant \frac{1}{12n^3} + \frac{3(n-1)}{16n^3} < \frac{13}{48n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

24. *a)* Directement : $B_{k,n}'(x) = k\binom{n}{k} x^{k-1}(1 - x)^{n-k} - (n - k)\binom{n}{k} x^k(1 - x)^{n-k-1}$. Comme $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et que $(n - k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$, il vient, pour $1 \leq k \leq n - 1$,

$$B_{k,n}' = n(B_{k-1,n-1} - B_{k,n-1}).$$

tandis que $B_{0,n}' = -nB_{0,n-1}$ et $B_{n,n}' = nB_{n-1,n-1}$.

b) La fonction $B_n(f)$ est polynomiale donc dérivable. D'après a),

$$(B_n(f))' = n \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} f(k/n)(B_{k-1,n-1} - B_{k,n-1}) - nf(0)B_{0,n-1} + nf(1)B_{n-1,n-1},$$

soit $(B_n(f))' = n \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} (f((k + 1)/n) - f(k/n))B_{k,n-1}$.

25. *a)* Si f est dérivable en 0, comme $B_n(f)'(0) = n(1 - x)^{n-1}(f(1/n) - f(0))$ et que $(n(f(1/n) - f(0)))$ tend vers $f'(0)$, $(B_n(f)'(0))$ tend aussi vers $f'(0)$. Si f est dérivable en 1, comme $B_n(f)'(1) = nx^{n-1}(f(1) - f(1 - 1/n))$ et que $(n(f(1) - f(1 - 1/n)))$ tend vers $f'(1)$, $(B_n(f)'(1))$ tend aussi vers $f'(1)$.

b) Pour établir i), on utilise une autre expression de $B_{k,n}'$.

- Soit $0 < x < 1$. On a $B_{k,n}'(x) = \frac{k}{x}B_{k,n}(x) - \frac{n-k}{1-x}B_{k,n}(x)$, soit

$$B_{k,n}'(x) = \frac{n}{x(1-x)}((k/n)(1-x)B_{k,n}(x) - (1-k/n)xB_{k,n}(x)).$$

  Multiplions par $g(k/n)$ et additionnons :

$$B_n(g)'(x) = \frac{n}{x(1-x)}((1-x)B_n(g_1)(x) - xB_n(g_2)(x)).$$

- On réécrit la relation de i) :

$$B_n(g)'(x) = \frac{n}{x(1-x)} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} B_{k,n}(x) g(k/n)((k/n)(1-x) - (1-k/n)x).$$

Or $(k/n)(1 - x) - (1 - k/n)x = k/n - x$, $\frac{n}{x(1-x)} = \frac{1}{V(T_n)}$ et

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} B_{k,n}(x) g(k/n)((k/n) - x) = \mathbb{E}(g(T_n)(T_n - x)).$$

On a bien $B_n(g)'(x) = \frac{\mathbb{E}(g(T_n)(T_n-x))}{V(T_n)}$.

- Notons h la fonction de $[0,1]$ dans R telle que $g(x) = (x - x_0)h(x)$ pour $x \neq x_0$ et $h(x_0) = 0$. Par construction $g'(x_0) = 0$ donc h est continue en x_0 et elle est donc continue sur $[0,1]$. La fonction h^2 est elle aussi continue et nulle en x_0. On sait que $(B_n(h^2))$ converge uniformément vers h^2 (voir 8)) et que $B_n(h^2)$ n'est autre que $E(h^2(T_n))$. En particulier $E(h^2(T_n))(x_0)$ tend vers 0.

Ainsi $B_n(g)'(x_0) = \frac{\mathbb{E}(h(T_n)(T_n-x_0)^2)}{V(T_n)}$. On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(h(T_n)(T_n - x_0)^2)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}((h(T_n))^2)(x_0)}\sqrt{\mathbb{E}((T_n - x_0)^4)}.$$

D'après 23d) et avec $V(T_n) = \frac{x_0(1-x_0)}{n}$, il vient $|B_n(g)'(x_0)| \leq \frac{\sqrt{\mathbb{E}((h(T_n))^2)(x_0)}}{x_0(1-x_0)}$. Ainsi $(B_n(g)'(x_0))$ tend vers 0.

- On a $f = g + k$ avec $k(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$. D'après 2), $B_n(k) = k$, donc $B_n(k)'(x_0) = f'(x_0)$. Puis $B_n(f)'(x_0) = B_n(g)'(x_0) + f'(x_0)$. Ainsi $(B_n(f)'(x_0))$ tend vers $f'(x_0)$.

A) Géométrie des courbes de Bézier

On se donne dans cette partie une suite de complexes $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$. On pose $G(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} B_{k,n}(t)P_k$ pour tout t de $[0,1]$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe de Bézier qui est l'image par G de $[0, 1]$.

26. S'il y a un seul point P_0, $G(t) = B_{0,0}(t)P_0 = P_0$ pour tout t ; dans ce cas $\mathcal{C} = \{P_0\}$.

S'il y a deux points P_0,P_1, $G(t) = B_{0,1}(t)P_0 + B_{1,1}(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$ pour tout t ; dans ce cas $\mathcal{C}$ est la segment $[P_0,P_1]$.

27. Dans tous les cas, puisque $B_{k,n}(0) = 0$ sauf $B_{0,n}(0) = 1$ et $B_{k,n}(1) = 0$ sauf $B_{n,n}(1) = 1$, on a $G(0) = P_0$ et $G(1) = P_n$.

28. Pour un t donné, les $B_{k,n}(t)$ sont strictement positifs et leur somme vaut 1. Ainsi $G(t)$ est un barycentre des P_k affectés de coefficients positifs des P_k. Il en résulte que $\mathcal{C}$ est incluse dans l'enveloppe convexe des P_k. Si tous les P_k sont alignés, il existe une droite D les contenant tous ; $\mathcal{C}$ est donc incluse dans D.

Supposons réciproquement que $G(t)$ parcoure la partie d'une droite D. Un certain déplacement $Q \mapsto uQ + v$, où u est un complexe de module 1 et v un complexe, envoie l'axe réel sur D. On a, pour tout t, $G(t) = UH(t) + v$ et $P_k = uQ_k + v$ où $H(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} B_{k,n}(t)Q_k$. Pour tout t, $H(t)$ est réel. On a donc pour tout t, $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} B_{k,n}(t)Im(Q_k) = 0$, et la liberté du système des polynômes de Bernstein force $Im(Q_k) = 0$ pour tout k ; ainsi les P_k sont sur la droite D.

29. On suppose $n \geq 2$ dans cette question. La fonction G est $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'elle est polynomiale. On a

$$G'(t) = n \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} B_{k,n-1}(t)(P_{k+1} - P_k)$$

(ce type de calcul a été fait au 24)b). L'existence d'une tangente en $G(t)$ est assurée s'il existe au moins un $m \geq 1$ tel que $G^{(m)}(t)$ n'est pas nul. Mais si toutes les dérivées de G' sont nulles en t, alors G' est la fonction nulle d'après la formule de Taylor pour les polynômes. La liberté des $B_{k,n-1}$ permet alors d'affirmer que les $P_{k+1} - P_k$ sont nuls, ce qui n'est pas car ils sont supposés distincts.

On a $G'(0) = n(P_1 - P_0)$ et $G'(1) = n(P_n - P_{n-1})$. Ainsi la tangente à $\mathcal{C}$ en $G(0)$ est la droite $P_0 P_1$ et la tangente en $G(1)$ est la droite $P_{n-1}P_n$.

30. Cette question est traitée en préambule du 28).

31. ***a)*** D'après 27), $G_n(0) = \alpha$ et $G_n(1) = \beta + i$.

b) D'après 29), $Re(G_n'(t)) = n \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} B_{k,n-1}(t)(Re(P_{k+1}) - Re(P_k))$. Tous les termes de cette somme sont strictement positifs. Ainsi $t \mapsto Re(G_n(t))$ est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$) et strictement croissante.

c) La fonction $t \mapsto Re(G_n(t))$ est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas. C'est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[0,1]$ sur son image qui est $[\alpha,\beta]$, car $Re(G_n(0)) = \alpha$, $Re(G_n(1)) = \beta$.

B) Estimateur de Bézier

32. Posons $\alpha_n(t) = Re(G_n(t))$ et $\gamma_n(t) = Im(G_n(t))$. On sait que α_n est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[0,\ 1]$ sur $[\alpha,\ \beta]$. La fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ (sa dérivée, la densité de X, est continue) et elle est croissante puisque c'est une fonction de répartition.

On a $\gamma'_n(t) = n \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} B_{k,n-1}(t)(F_X(x_{k+1}) - F_X(x_k))$. Tous les termes de cette somme sont positifs et au moins l'un d'eux est strictement positif car, comme $F_X(x_0) = 0$ et que $F_X(x_n) = 1$, les $F_X(x_{k+1}) - F_X(x_k)$ ne sont pas tous nuls. On en déduit que γ_n est strictement croissante. La fonction réciproque $\gamma_n \circ \alpha_n^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ (car γ_n est polynomiale et α_n est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme), strictement croissante et envoie $[\alpha,\beta]$ sur $[0,1]$; c'est donc la fonction de répartition de X_n, une variable aléatoire à densité continue.

33. Ici $x_k = \lambda(k/n)$ où $\lambda(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t$. Donc $\alpha_n = B_n(\lambda)$. D'après 2) $B_n(\lambda) = \lambda$. Ainsi $G_n(t) = \lambda(t) + iB_n(F_X \circ \lambda)(t)$. La fonction de répartition de X_n est donc donnée par $F_{X_n} \circ \lambda = B_n(F_X \circ \lambda)$. D'après 8) $(F_{X_n} \circ \lambda)$ tend uniformément vers $F_X \circ \lambda$. En particulier la suite (X_n) converge en loi vers X.

34. Par définition $F_{X_n}(\alpha_n(t)) = \gamma_n(t)$. La densité de X_n étant F_{X_n}', il vient

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_\alpha^\beta x F'_{X_n}(x)\, dx.$$

Après changement de variable $x = \alpha_n(t)$ il vient $E(X_n) = \int_0^1 \alpha_n(t)\gamma'_n(t)d\, t$. On a

$$\alpha_n(t)\gamma'_n(t) = n \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} B_{k,n}(t)B_{i,n-1}(t)x_k(F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)).$$

On en tire

$$\mathbb{E}(X_n) = n \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} \binom{n}{k}\binom{n-1}{i} I(k+i, 2n-k-i-1)x_k(F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)),$$

où $I(p,\ q) = \int_0^1 t^p(1 - t)^q\, d\, t$ pour tous p,q.

Une intégration par parties montre que pour $p \geq 1$, $(q + 1)I_{p,q} = pI(p - 1,q + 1)$. Ainsi $(q + 1)(q + 2)\dots(q + p)I_{p,q} = p!I(0,p + q) = \frac{p!}{p+q+1}$. Donc $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Ainsi $I(k + i,\ 2n - k - i - 1) = \frac{1}{2n\binom{2n}{k+i}}$. Le résultat annoncé s'en déduit.

35. La suite de variables X_n n'est pas une suite <u>définie</u> de variables aléatoires. Elle n'existe qu'au travers de sa loi et ne peut en aucune façon converger, ni en probabilité, ni presque sûrement, ni en moyenne quadratique.
[Table des matières]

[<]