Agrégation de Mathématiques : problème d'été 2014 (Analyse et Probabilités)

Correction.

Partie A : Weierstrass via (les polynômes de) Bernstein.

1. Comme $F(a,b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k (1-b)^{n-k}$ par la formule du binôme, il est clair que :

(i) $B_n(f_0)(x) = F(x,x) = 1.$

(ii)
$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \, k x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{x}{n} \frac{\partial F}{\partial a}(x,x) = \frac{x}{n} \cdot n = x$$

(iii)
$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{k(k-1)}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{k}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{x^2}{n^2} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(x,x) + \frac{x}{n^2} \frac{\partial F}{\partial a}(x,x)$$
$$= \frac{x^2}{n^2} n(n-1) + \frac{x}{n^2} \cdot n = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$$
$$= x^2 - \frac{1}{n} x(x-1).$$

2. On considère $f_z(x) = (x-z)^2$. On a :
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - z\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f_z)(x)$$
$$= B_n(x^2 - 2xz + z^2)(x)$$
$$= x^2 - \frac{1}{n} x(x-1) - 2zx + z^2$$
$$= (x-z)^2 - \frac{1}{n} x(x-1)$$

Au point $x = z$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - z\right)^2 z^k (1-z)^{n-k} = -\frac{1}{n} z(z-1).$$

Comme $0 \leq z \leq 1$, $-\frac{1}{n} z(z-1) = \frac{1}{n} z(1-z) \leq \frac{1}{n}$ et comme tous les termes de la somme du membre de gauche ci-dessus sont positifs, on a :

$$\sum_{k, \left|\frac{k}{n}-z\right| \geq \eta} C_n^k \left(\frac{k}{n} - z\right)^2 z^k (1-z)^{n-k} \leq \frac{1}{n}$$

Mais dans la somme $\left(\frac{k}{n} - z\right)^2 \geq \eta^2$, d'où le résultat.

3. On estime $|B_n(f)(x) - f(x)| = Q_n(x)$.

$$Q_n(x) = \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x) - f(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] R_{n,k}(x) \right| \quad \text{puisque } \sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = 1.$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| R_{n,k}(x)$$ par inégalité triangulaire, les $R_{n,k}$ étant positifs.

$$\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \eta} (\cdots) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > \eta} (\cdots)$$

Pour la première somme, on a : $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \sup_{|y-z| \leq \eta} |f(y) - f(z)| = m(\eta)$

et $\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \eta} R_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = 1$.

Pour la seconde, on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2\|f\|_\infty$ et on utilise la question 2 pour estimer la somme des $R_{n,k}$. D'où :

$$Q_n(x) \leq m(\eta) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}.$$

Et donc $$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq m(\eta) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}.$$

Pour prouver que $\|B_n(f)-f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, on utilise la définition. Soit $\varepsilon>0$, on doit prouver qu'il existe N tel que si $n \geq N$ alors $\|B_n(f)-f\|_\infty < \varepsilon$.

On remarque d'abord que f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine et donc $m(\eta) \longrightarrow 0$ quand $\eta \to 0$. Il existe donc $\eta_0>0$, assez petit tel que $m(\eta_0) < \varepsilon/2$.

Fixons un tel η_0. Comme $\dfrac{1}{n\eta_0^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$, il existe N tel que, si $n \geq N$:

$$\frac{1}{n\eta_0^2} < \varepsilon/2 .$$

Pour un tel N, si $n \geq N$:

$$\|B_n(f)-f\|_\infty \leq m(\eta_0) + \frac{1}{n\eta_0^2} < \varepsilon .$$

<u>Remarque</u> une preuve plus courte consiste à utiliser des $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ car

$$0 \leq \underline{\lim}\, \|B_n(f)-f\|_\infty \leq \overline{\lim}\, \|B_n(f)-f\|_\infty \leq m(\eta)$$

pour tout $\eta>0$. En faisant tendre η vers 0, on en déduit que :

$$\underline{\lim}\, \|B_n(f)-f\|_\infty = \overline{\lim}\, \|B_n(f)-f\|_\infty = 0$$

d'où $\lim_n \|B_n(f)-f\|_\infty = 0$.

<u>Partie B : Théorème de Korovkine</u>

1. Ce résultat est standard. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Comme, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty$$

on en déduit que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in [a,b]$ et, $\mathbb{R}$ étant complet, $(f_n(x))_n$ est une suite convergente. On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))_n$ et on veut prouver que f est continue. Pour cela on écrit :

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)|$$

Or, on sait que pour tout $\varepsilon>0$, il existe N tel que si $p,q \geq N$ alors

$$|f_p(x)-f_q(x)| \leq \|f_p-f_q\|_\infty < \varepsilon$$

(noter que le N ne dépend que de ε et pas de x)

il en résulte que $|f(x)-f_q(x)|<\varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$ en faisant tendre p vers l'infini. D'où en passant au sup

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_q(x)| < \varepsilon$$

Ce qui prouve que ce sup tend vers 0 lorsque q tend vers l'infini. Il en résulte :

$$|f(x)-f(y)| \leq 2\sup_{z\in[a,b]} |f_n(z)-f(z)| + |f_n(x)-f_n(y)|$$

Si $\varepsilon>0$ est arbitraire alors, pour N assez grand, le premier terme du membre de droite peut être rendu inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N$. On a donc en choisissant $n=N$:

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + |f_N(x)-f_N(y)|$$

N étant fixé, la continuité de f_N prouve que si $|x-y|<\alpha$ alors $|f_N(x)-f_N(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$, soit $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

2. Comme $f + \|f\|_\infty \geq 0$, on a

$$u(f + \|f\|_\infty)(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x$$

d'où $\quad u(f)(x) + \|f\|_\infty u(1)(x) \geq 0$ par linéarité

$$u(f)(x) \geq - \|f\|_\infty \, \underline{\|u(1)\|_\infty}$$

existe car $u(1)$ est une fonction continue sur $[a,b]$.

De même :

$\|f\|_\infty - f \geq 0$ donc $u(\|f\|_\infty - f)(x) \geq 0$ et :

$$\|f\|_\infty u(1)(x) - u(f)(x) \geq 0$$

donc $u(f)(x) \leq \|f\|_\infty \|u(1)\|_\infty$.

Les deux inégalités montrent $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|u(1)\|_\infty$.

3. Si $f \in E$, f est uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, si $|x-y| < \eta$ alors

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Si $|x-y| \geq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq \dfrac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} |x-y|^2$.

Il suffit de prendre $C = \dfrac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$.

---

4. D'après la question 3, on voit que, pour tout x :

$$-\varepsilon + f(x) - C(f_2(y) - 2x f_1(y) - f_0(y)) \leq f(y) \leq \varepsilon + f(x) + C(f_2(y) - 2x f_1(y) + f_0(y))$$

Par la positivité de u_n,

$$(f(x) - \varepsilon - C) u_n(f_0)(x) - C u_n(f_2)(x) + 2Cx\, u_n(f_1) \leq u_n(f)(x) \leq (\varepsilon + f(x) + C) u_n(f_0)(x) + C u_n(f_2)(x) - 2Cx\, u_n(f_1)$$

Et :

$$|u_n(f(x)) - f(x)| \leq |f(x)|\, |u_n(f_0)(x) - f_0(x)| + \varepsilon |u_n(f_0)(x)| +$$

4. On remarque d'abord que si f, g sont deux fonctions de E telles que $f(y) \leq g(y)$ pour tout y alors

$$u_n(f)(y) \leq u_n(g)(y) \text{ pour tout } y.$$

Il suffit d'appliquer u_n à $g - f \geq 0$.

Soit $x \in [a,b]$, on pose $g(y) = \varepsilon + C|x-y|^2$ la fonction qui apparaît dans la question 3. On a :

$$f(x) - g(y) \leq f(y) \leq f(x) + g(y) \qquad \underline{\text{NB}}: f(x) = f(x) f_0(y).$$

et donc :

$$f(x) u_n(f_0)(x) - u_n(g)(x) \leq u_n(f)(x) \leq f(x) u_n(f_0)(x) + u_n(g)(x)$$

et finalement :

$$f(x)\big(u_n(f_0)(x) - f_0(x)\big) - u_n(g)(x) \leq u_n(f)(x) - f(x) \leq f(x)\big(u_n(f_0)(x) - f_0(x)\big) + u_n(g)(x)\big).$$

Ceci montre que :

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq \big|f(x)[u_n(f_0)(x) - f_0(x)] + u_n(g)(x)\big|$$

$$\leq |f(x)| . |u_n(f_0)(x) - f_0(x)| + |u_n(g)(x)|$$

Il reste à estimer les termes du membre de droite :

(i) $|f(x)| . |u_n(f_0)(x) - f_0(x)| \leq \|f\|_\infty . \|u_n(f_0) - f_0\|_\infty$.

(ii) $$|u_n(g)^{(x)}| = |u_n(\varepsilon f_0 + C(f_2 - 2x f_1 + x^2 f_0))(x)|$$

$$= |\varepsilon u_n(f_0)^{(x)} + C(u_n(f_2)^{(x)} - 2x u_n(f_1)^{(x)} + x^2 u_n(f_0)^{(x)}|$$

En soustrayant les termes correspondants $[u_n(f_0) = [u_n(f_0) - f_0] + f_0$ par exemple$]$, on se retrouve avec

$$|u_n(g(x))| \leq g(x) + \varepsilon |u_n(f_0)^{(x)} - f_0(x))| + C|u_n(f_2)(x) - f_2(x)|$$
$$+ 2C|x| |u_n(f_1)^{(x)} - f_1(x))| + x^2 C |u_n(f_0)^{(x)} - f_0^{(x)}|$$

Comme $g(x) = \varepsilon$ et $|x| \leq \max(|a|,|b|)$, on a :

$$|u_n(g)(x)| \leq \varepsilon + \left(\varepsilon + C[\max(|a|,|b|)]^2\right) \|u_n(f_0) - f_0\|_\infty$$
$$+ C\|u_n(f_2) - f_2\|_\infty$$
$$+ 2C\max(|a|,|b|)\, \|u_n(f_1) - f_1\|_\infty$$

L'inégalité de l'énoncé est donc satisfaite avec

$$K_0 = \varepsilon + C[\max(|a|,|b|)]^2 + \|f\|_\infty.$$
$$K_1 = 2C\max(|a|,|b|)$$
$$K_2 = C$$

en remarquant que la majoration de $|u_n(f)(x) - f(x)|$ est indépendante de x.

La convergence uniforme de $u_n(f)$ vers f en résulte car, pour N assez grand, on a, par hypothèse

$$\|u_n(f_i) - f_i\|_\infty \leq \varepsilon \qquad (i = 0, 1, 2)$$

et donc si $n \geq N$:

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon + K_0\varepsilon + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon$$

quantité pouvant être rendue arbitrairement petite.

5. Il suffit de prouver que $B_n : E \to E$ où $E = C([0,1])$ satisfait les hypothèses de la question 4. La positivité des B_n résulte immédiatement de celle des $R_{n,k}$ et la convergence uniforme de $B_n(f_0)$, $B_n(f_1)$ est claire par la question 1, de même que celle de $B_n(f_2)$ car $\|B_n(f_2) - f_2\|_\infty = \left\|\frac{x(1-x)}{n}\right\|_\infty = \frac{1}{4n}$.

La convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f résulte de la question 4.