Agrégation de Mathématiques

Exercices de Calcul Différentiel

(en vrac)

Les exercices sont cotés de deux manières : selon leur difficulté (F = facile, M = difficulté moyenne, D = un peu plus difficile) et suivant un ordre de "priorité" (I = incontournable, à savoir faire absolument, CL = classique, qu'il faudrait savoir faire, SN = second niveau, pour ceux qui maîtrisent les "CL" et enfin AM = amusant — surtout pour le jury — exercices moins classiques, demandant un bagage en calcul diff. plus complet, pour ceux qui dominent les SN).

Exercice 1. Etudier les propriétés de différentiabilité des fonctions suivantes et calculer, quand elle existe, leur dérivée :

a) (F+I) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel, A est une matrice $N \times N$ et $b \in \mathbb{R}^N$.

b) (M+CL) $f : GL_N(\mathbb{R}) \to GL_N(\mathbb{R})$, $f(M) = M^{-1}$.

c) (M+CL) $f : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(M) = \det(M)$.

d) (M+I) Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, soit B un espace de Banach et $g : B \times X \to \mathbb{R}$ une application. Trouver les "bonnes" conditions sur g pour que l'application f "définie" de la manière suivante soit bien définie et différentiable :

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto f(y) = \int_X f(y,x)\,d\mu(x).$$

(F+CL)
e) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et H un sous-espace affine de $\mathbb{R}^N$. Etudier $g : H \to \mathbb{R}^p$, $g(x) = f(x)$ (la restriction de f à H).

f) (F+I) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. Etudier $g :]0,1[\to \mathbb{R}^p$, $g(t) = f(ta + (1-t)b)$ où $a, b \in \mathbb{R}^N$.

Exercice 2. (M+I) Trouver des exemples de fonctions qui

- (en $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$) admet toutes ses dérivées partielles mais n'est pas différentiable.
- (en $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$) admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions mais n'est pas différentiable
- est différentiable en un point et sur un voisinage de ce point mais les dérivées ne sont pas continues en ce point.

Exercice 3. (D+CL) Soit U un ouvert d'un espace de Banach B et $f : U \to C$ une application continue sur U où C est un espace de Banach. Soit enfin $a \in U$. On suppose que f est différentiable sur $U - \{a\}$ et que $f'(x)$ converge vers L lorsque x tend vers a ($x \neq a$). Montrer que f est différentiable en a et que $f'(a) = L$.
(Ind. : on pourra estimer $f(x) - f(a) - L(x-a)$ en

utilisant le théorème des accroissements finis).

Exercice 4. (F+I) Soit $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une aplication continue qui admet un maximum local en $x_0 \in \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On suppose que f est deux fois différentiable en x_0. Prouver que :

$$Df(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad D^2 f(x_0) \leq 0 .$$

(On rappelle qu'une matrice symétrique A satisfait $A \leq 0$ ssi toutes ses valeurs propres sont négatives ou de manière équivalente si, pour tout $p \in \mathbb{R}^N$:

$$(Ap, p) \leq 0 .$$

La preuve de l'équivalence est un bon exercice (M)).

Que deviennent ces propriétés si x_0 est un point de minimum local ?

Exercice 5. ([redacted]+CL) Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que f, Df et $D^2 f$ sont bornés sur $\mathbb{R}^N$. On note :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)| , \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \|Df(x)\| \text{ et } M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |||D^2 f(x)||| ,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^N$ et $|||\cdot|||$ la norme matricielle $|||A||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Prouver que :

$$M_1^2 \leq M_0 . M_2 \ .$$

(Ind. : on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral en tout point $x \in \mathbb{R}^N$ et choisir astucieusement le point en lequel on l'applique)

Exercice 6. (F+I) Vérifier que si a est suffisamment proche de 0 l'équation :

$$x e^{-ax} = 10$$

admet au moins une solution et en déterminer une approximation.

Même question pour l'équation :

$$x^3 + px + 1 = 0$$

avec p "voisin" de 0.

Exercice 7 (F+I) Déterminer les points critiques de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

Exercice 8 : (F+I) Résoudre le problème d'optimisation avec contrainte :

$$\min_{x^2+y^2=1} (x+y)$$

Exercice 9 (D+SN) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes (définition de la convexité) :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $\forall \alpha \in [0,1]$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$:

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq 0.$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $D^2 f(x) \geq 0$.

(En fait certaines implications sont faciles à démontrer, d'autres sont plus délicates...)

Exercice 10. (M+CL) Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une application homogène de degré 1 i.e.
$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$.
Démontrer que, si f n'est pas identiquement nulle, f ne peut pas être différentiable en 0.

Exercice 11. (D+AM) Soit $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que u, Du et D^2u sont bornés sur $\mathbb{R}^N$.
On considère, pour $\varepsilon > 0$ petit, la fonction $u_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u_\varepsilon(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ u(y) + \frac{|x-y|^2}{\varepsilon} \right\}.$$

1. Montrer que si ε est suffisamment petit, l'infimum est atteint en un seul point $y(x)$.
2. Prouver que $y(x)$ est l'unique solution de l'équation :

$$Du(y) + 2\frac{(y-x)}{\varepsilon} = 0 .$$

3. En utilisant le théorème des fonctions implicites, démontrer que $x \mapsto y(x)$ est une fonction de classe C^1.
4. En déduire que u_ε est une fonction de classe C^1 puis de classe C^2.

Exercice 12 (M+CL) Soit A une matrice $N \times N$, symétrique. En utilisant le problème d'optimisation :

$$\operatorname*{Min}_{\|x\|^2 = 1} \frac{1}{2}(Ax, x) \quad ,$$

prouver que A admet une valeur propre réelle.

Exercice 13. (F+CL) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une application différentiab[le] sur $\mathbb{R}^N$. Montrer que, si f satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad f(x) = 0 \implies \nabla f(x) \neq 0,$$

alors :

$$\overline{\{ f > 0 \}} = \{ f \geq 0 \},$$

et :

$$\overline{\{ f < 0 \}} = \{ f \leq 0 \}.$$

Exercice 14. (F+I) Etudier la continuité et la différentia-bilité des fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 15. (F+I) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ défini[e] par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad f(x) = \exp\left(-(x_1^2 + \dots + x_N^2)\right)$$

est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$. Prouver que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad |f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|_2$$

pour une certaine constante C. Déterminer la "meilleure" constante C telle que cette inégalité est vraie (c'est-à-di[re] la plus petite).

Exercice 16 (M+CL) Résoudre les problèmes d'optimisa-
-tion dans $\mathbb{R}^N$:

$$\min_{\|x\|_q = 1} \|x\|_p^p \quad ,$$

pour $p, q > 1$, où

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \qquad \|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^r \right)^{1/r}$$

pour $r = p$ ou q.

Exercice 17. (F+I) Calculer les dérivées puis les gradients des fonctions définies par :

(i) $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \qquad g(x) = f(Ax)$
où $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une application différentiable et A une matrice $p \times N$.

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g(x,y) = f(x+y, x-y)$
où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable.

Exercice 18 (D+AH) Soit $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^1 telle qu'il existe une constante $k > 0$ pour laquelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N \qquad (F(x) - F(y), x - y) \geq k \|x - y\|^2 .$$

Le but est de montrer que F est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^N$.

(i) Prouver que $\|F(x)\| \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$.

(ii) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $Df(x)$ est dans $GL_N(\mathbb{R})$

(iii) Démontrer que, si $a \in \mathbb{R}^N$ est fixé, alors la fonction

$x \longmapsto \|F(x) - a\|^2$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}^N$.

(iv) Si c est le point où le minimum est atteint, montrer que $F(c) = a$. Conclure.

<u>Exercice 19</u> (D+CL) Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $B = B(x_0, r) \subset U$.

On suppose que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in B$ et qu'il existe des constantes $M > 0$ et $0 < b < 1$ telles que

a) $\|[Df(x)]^{-1}\| \leq M$ et $\|Df(u) - Df(v)\| < \dfrac{b}{M}$ pour tous x, u, v dans B.

b) $\|f(x_0)\| < \dfrac{r(1-b)}{M}$.

On construit par récurrence la suite $(x_n)_n$ en posant :

$$x_{n+1} = x_n - [Df(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

où x_0 est le centre de la boule B.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B$ (et que $(x_n)_n$ est bien définie).

(ii) Prouver que $(x_n)_n$ converge vers une racine a de f et que

$$\|x_n - a\| \leq \|x_1 - x_0\| \frac{b^n}{1-b}.$$

(iii) Outre la convergence de l'algorithme de Newton, quel théorème ce type d'argument permet-il de démontrer ?

Exercice 20 : Résoudre les équations différentielles.

(i) (F+I) $y'\cos(x) + y\sin(x) = \cos(x)$ (variation des constantes)

(ii) (F+I)
$$y'' + xy' + y = 0$$
$$4xy'' + 2y' + y = 0$$
$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$ (fonctions de Bessel)

(Ces exemples-là se traitent en cherchant des solutions développables en séries entières.)

(iii) (F+I) $x' = ay$, $y' = -ax$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

(iv) (M+CL)

- $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3(x)}$
- $x^2y' + y + y^2 = 0$ pour $x > 0$ (on pourra poser $z = 1/y$)
- $xyy'' + xy'^2 - yy'$ (on pourra poser $z = y'/y$).

Exercice 21. (D+AM) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue. Montrer que l'on a existence locale pour l'équation différentielle ordinaire
$$\dot{X}(t) = f(X(t)), \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^N$$
pour tout x, c'est-à-dire l'existence d'une telle solution sur un intervalle $[0, T]$ pour un certain $T > 0$. (On pourra commencer par le cas où f est bornée).

Montrer qu'une telle solution n'est pas nécessairement unique.

Agrégation de Mathématiques

Calcul Intégral

Rappel : La difficulté des exercices est côtée F = facile, M = difficulté moyenne, D = un peu plus difficile. Les exercices I sont incontournables, CL = classique, SN = second niveau et AM = amusant (exercices plus complets, à placer dans une leçon d'oral...)

Exercice 1. (M + I)

(i) Donner une caractérisation des fonctions Riemann intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

(ii) Quelles classes de fonctions vérifient cette caractérisation ?

(iii) Donner un exemple de fonction intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

Exercice 2. (M + I)

(i) Déterminer la nature des intégrales suivantes en fonction des différents paramètres :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\log t)^\beta}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.
- Même question en remplaçant $\int_1^{+\infty}$ par $\int_0^1$.
- Même question en remplaçant $\log t$ par e^t.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^k)}{t^\alpha}\, dt$ $(k \geq 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

Exercice 3 (M+CL). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant la théorie de l'intégrale de Riemann, montrer que la fonction

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est bien définie, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Exercice 4 (M+CL) Prouver que la suite $\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers e^{-x} si $x>0$.

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx$$

pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 5 (M+CL) Soit f une fonction positive mesurable sur $[0,+\infty[$. On suppose que la fonction $x \longmapsto x f(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Montrer que la fonction $x \longmapsto x \sum_{n=1}^{+\infty} f(nx)$ est aussi intégrable et en déduire que, pour presque tout $x \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) < +\infty .$$

Exercice 6 (F+I) On pose $C =]0,1[\times]0,1[$ et on considère la fonction définie sur C par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1-xy} .$$

Montrer que $f \in L^1(C, dxdy)$ et calculer $\int_C f(x,y)\,dxdy$.

Exercice 7 (F+I). Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha, \beta > 0$ et de $p \geq 1$ la fonction f définie p.p sur $\mathbb{R}^N$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(1+|x|^\alpha)\,|x|^\beta}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^N$, est-e[lle] dans $L^1(\mathbb{R}^N, dx)$, dx désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. (Le faire d'abord pour $N=2$).

Exercice 8 (M+CL) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$.

(i) Prouver que si $f \in L^1(\mu)$ alors :

$$\phi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \phi \circ f \, d\mu$$

(ii) En déduire que $L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 9. (D+AM) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq C(1+|x|^p) \quad \text{où } p > 1.$$

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $u \in L^p(\mu)$, on pose :

$$J(u) = \int_X f(u)\, d\mu.$$

Prouver que J est bien définie et qu'elle est continue sur $L^p(\mu)$.

Exercice 10. (F+I) On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Calculer $\iint_{[0,\alpha]\times[0,+\infty[} e^{-xy^2} \sin(x)\, dx\, dy$ et en déduire

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx$. Comment calcule-t-on $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$?

Exercice 11. (F+I) Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
2. On pose :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) dx$$

Démontrer que f est continue.

Exercice 12 (F+IL) On munit $L^2(]a,b[)$ du produit scalaire habituel. On introduit l'application

$$A : L^2(]a,b[) \longrightarrow L^2(]a,b[)$$

définie par :

$$(Af)(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{si } x \in]a,b[.$$

(i) Montrer que A est bien défini.
(ii) Déterminer l'opérateur adjoint de A.

Exercice 13. (F+I) Soit f une fonction intégrable telle que pour toute partie mesurable A

$$\int_A f \, d\mu = 0$$

que peut-on dire de f ?

Exercice 14. (F+I) Prouver que, pour tous $a, b > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exercice 15 (M+I) Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0$$

Exercice 16 (M+CL) Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f \in L^1(\mu)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(t) = \mu(|f| > t).$$

Montrer que $F \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et que :

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_0^{+\infty} F(t)\, dt$$

Exercice 17. (M+CL) Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que Γ est bien définie et que $\Gamma \in C(]0, +\infty[)$
2. Prouver que

$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$

3. Démontrer que $\Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[)$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\Gamma''(x)\,\Gamma(x) \geq (\Gamma'(x))^2$$

et en déduire que $\log(\Gamma)$ est convexe.

Exercice 18 (M+CL) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose, pour $h > 0$ petit :

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

(i) Prouver que $f_h \in L^1(\mathbb{R})$

(ii) Montrer que $f_h \longrightarrow f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $h \to 0$.

Exercice 19. (M + CL) Calculer les transformées de Fourier des fonctions :

$$f(x) = \exp(-a|x|) \quad (a>0) \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$
$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a>0) \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$
$$f(x) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \quad (a>0) \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$

où $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-a,a]$

Exercice 20 : (M+I) On appelle approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^N$ toute suite de fonctions $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifiant :

1. $\rho_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y)\,dy = 1$
2. Pour tout voisinage V de 0
$$\int_{V^c} |\rho_\varepsilon(x)|\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0,$$
3. $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\varepsilon(x)|\,dx \leq M$ (indépendant de ε).

(i) Donner des exemples d'approximations de l'unité.

(ii) Prouver que, si f est borné uniformément continu sur $\mathbb{R}^N$ alors
$$f * \rho_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}^N$$

(iii) Montrer que si $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est à support dans un compact fixe alors $f * \rho_\varepsilon$ est bien défini pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R}^N)$ et que $f * \rho_\varepsilon \longrightarrow f$ localement uniformément.

Exercice 21 (I + AM) On cherche à résoudre l'équation :
$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$
où :
$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$
On suppose tout d'abord que $f \in \mathcal{S}$, l'espace de Schwartz et que l'équation ci-dessus admet une solution $u \in \mathcal{S}$.

(i) Prouver que :
$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\langle \xi, x\rangle}}{1 + 4\pi^2|\xi|^2}\, d\xi$$
où :
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \exp(-2i\pi\langle y, \xi\rangle)\, dy.$$
(ii) En déduire que l'hypothèse ci-dessus était tout à fait raisonnable.

(iii) Démontrer que :
$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
pour tout $1 \leq i, j \leq N$.

Exercice 22 (F + I). Calculer $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a\|x\|^2} dx$ où $a > 0$ et :
$$\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2 \quad \text{si } x = (x_1, \ldots, x_N).$$

Exercice 23 (F+I). Calculer les intégrales suivantes :

(i) $\displaystyle\iint_\Delta \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^2}$ où $\Delta = \{(x,y) \setminus y^2 \leq 2x\}$

(ii) Volume de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 .$$

(iii) Soit H l'hyperboloïde de révolution d'équation

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

Calculer le volume du compact de $\mathbb{R}^3$ limité par H et les plans d'équations $z = z_0$, $z = z_1$ avec $c < z_0 < z_1$.

Exercice : le but de cet exo est de caractériser (partiellement) la question suivante : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, à quelle condition existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla f(x) = g(x)$ pour $x \in \Omega$?

① On suppose que g est de classe C^1 sur Ω. Donner une condition nécessaire simple sur g pour que f existe.

② Si $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \Omega$ est un chemin dans Ω, on note

$$\int_\gamma g_1 dx_1 + g_2 dx_2 \dots + g_n dx_n = \int_\alpha^\beta \left[g_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + g_n(\gamma(t))\gamma_n'(t) \right] dt$$

$d\omega = g_1 dx_1 + \dots + g_n dx_n$ est appelée une 1-forme différentielle.

Prouver qu'une condition nécessaire à l'existence de f est la propriété

$$\int_\gamma (g_1 dx_1 + \dots g_n dx_n) = 0$$

pour tout lacet γ inclus dans Ω (i.e. pour tout chemin tel que $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$).

③ On suppose que Ω est convexe (ou étoilé par rapport à l'un de ses points). Prouver que la condition nécessaire du ① est alors suffisante.

④ Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ où la condition du ① est satisfaite mais pas celle du ②. Conclure.

Remarques : (i) Quand la condition donnée au ① est satisfaite, on dit que la forme différentielle $d\omega$ est fermée alors que si $g = \nabla f$ on dit qu'elle est exacte.

(ii) L'exemple du ④ montre qu'une forme peut être fermée sans être exacte mais ③ dit que cela ne peut se produire que si Ω n'est pas étoilé.

(iii) Notez l'analogie avec les fonctions holomorphes.

Exercices de Calcul Différentiel

① Soit $\psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et K un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^p$. On introduit la fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \inf_{y \in K} \psi(x, y)$$

(i) Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}^N$

(ii) Au point $x_0 \in \mathbb{R}^N$, on suppose qu'il existe un unique $y_0 \in K$ tel que $\varphi(x_0) = \psi(x_0, y_0)$. Montrer que φ est dérivable en x_0 et que :

$$D\varphi(x_0) = D_x \psi(x_0, y_0).$$

<u>Application</u> : distance (ou distance au carré) à un ensemble. Examiner le cas de la sphère.

---

② Soit $\mathcal{S}^+(N)$ l'ouvert des matrices symétriques définies positives (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont strictement positives)

(i) Prouver que $\mathcal{S}^+(N)$ est un ouvert convexe

(ii) On introduit $\psi : \mathcal{S}^+(N) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(m, p) = (m^{-1} p, p)$$

Prouver que ψ est convexe.