Université de Tours-L1 Mathématiques, Informatique et SM - Semestre 1, 2013-14
GROUPE 2-INTERROGATION ECRITE DE MATHEMATIQUES- Durée : 30mn

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés pendant l'épreuve.

NOM : **PRENOM :**

Exercice 1. Soit p le polynôme donné par $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.

1. Vérifier que i est une racine de p.
2. Factoriser p en produit de polynômes irréductibles complexes puis en en produit de polynômes irréductibles réels.

1. $p(i) = -2i + 3 + 2i - 3 = 0 \Rightarrow i$ est racine de p.
2. p polynôme à coefficient réels $\Rightarrow \bar{i} = -i$ est aussi racine

$\Rightarrow (z-i)(z+i) = z^2+1$ divise p.

On effectue la division euclidienne de p par z^2+1

$$\begin{array}{r|l} 2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 & z^2+1 \\ -2z^3 \qquad\quad - 2z & 2z - 3 \\ \hline -3z^2 - 3 & \\ +3z^2 + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc $p(z) = (z^2+1)(2z-3)$

$= (z-i)(z+i)(2z-3)$

La factorisation en polynômes complexes irréductibles est

$p(z) = (z-i)(z+i)(2z-3)$

La factorisation en polynômes irréductibles réels est

$p(x) = (x^2+1)(2x-3)$

Exercice 2. Montrer que pour tous les sous-ensembles A et B de E on a :

$$A \cup (A^c \cap B) = A \cup B \quad \text{et} \quad (A \cup B^c)^c = A^c \cap B$$

En déduire que

$$\Big(A \cup (A^c \cap B)\Big) \cap (A \cup B^c)^c = A^c \cap B\,.$$

$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B$.

d'après les lois de De Morgan,

$(A \cup B^c)^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B$.

On en déduit,

$(A \cup (A^c \cap B)) \cap (A \cup B^c)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cap B)$

$= (A \cap A^c \cap B) \cup (B \cap A^c \cap B)$

$= \emptyset \cup (A^c \cap B) = A^c \cap B$

Exercice 3. Soit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2 - n$.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
2. Ecrire en "language mathématiques" les 3 assertions suivantes : f est injective, f est croissante, f est surjective.
3. f est-elle injective ?
4. Montrer que f est croissante.
5. f est-elle surjective ? f est-elle bijective ?

1. $f(0) = 0$. $f(1) = 0$. $f(2) = 2$

2. $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

 • $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \geq m \Rightarrow f(n) \geq f(m)$

 . $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} \ /\ n = f(m)$.

3- Non car $f(0) = f(1)$

4- $f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = 2n \geq 0$

Donc f est $\nearrow$

5. $f(0) = f(1) = 0$ et $f(2) = 2$. Comme $f \nearrow$, $\forall n \geq 2$, $f(n) \geq 2$

Donc 1 n'a pas d'antécédent par $f \Rightarrow f$ n'est pas surjective. Puisque f n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

Exercice 4. Etudier la convergence et les limites éventuelles des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n^2+3}{2n^2+4}, \qquad v_n = \frac{n^2+3}{2n+4} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n^2(-1)^n+3}{2n+4}.$$

---

a) $\forall n > 0,\ u_n = \dfrac{1 + 3/n^2}{2 + 4/n^2} \to 1/2$

b) $\forall n > 0,\ V_n = \underbrace{(n)}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\dfrac{1+3/n^2}{2+4/n}\right)}_{\to \frac{1}{2}} \to +\infty$

c) $\forall n > 0,\ w_{2n} = 2n \dfrac{(-1)^{2n} + \frac{3}{(2n)^2}}{2 + 4/2n} = \underbrace{(2n)}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\dfrac{1 + \frac{3}{(2n)^2}}{2 + 2/n}\right)}_{\to 1/2} \to +\infty$

$w_{2n+1} = (2n+1) \dfrac{(-1)^{2n+1} + \frac{3}{(2n+1)^2}}{2 + 4/2n+1} = \underbrace{(2n+1)}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\dfrac{-1 + \frac{3}{(2n+1)^2}}{2 + 4/(2n+1)}\right)}_{\to -1/2} \to -\infty$

Donc (w_n) n'a pas de limite.