Examen de Calcul Différentiel-Session 2-Durée 3h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x\cos z - xe^y, (x^2+y^2)e^z - x)$$

1) Déterminer 2 solutions évidentes de l'équation :

$$f(x,y,z) = (0,0)$$

2) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tels que $\varphi(0) = (1,0)$ et $f(\varphi(z), z) = 0$ pour tout $z \in]-\delta, \delta[$.
3) Calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x - \frac{1}{2}\sin y, y + \frac{1}{2}\sin x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
2) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|$$

où $\| \ \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
3) En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.
4) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x,y) = (a + \frac{1}{2}\sin y, b - \frac{1}{2}\sin x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| .$$

b) En déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.
5) Calculer $Df^{-1}(0,0)$.

Exercice 3.

On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire noté $\langle , \rangle$ et de la norme associée $\| \, \|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle Df(x)h, h\rangle \geq C\|h\|^2 .$$

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(t) = \langle f(tx + (1 - t)y), x - y\rangle .$$

Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in [0, 1]$.

2) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq C\|x - y\|^2 .$$

3) Montrer que f est injective.

4) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (Indic: Etand donnée une suite de Cauchy $(z_n)_{n\geq 0} = (f(x_n))_{n\geq 0} \subset f(\mathbb{R}^n)$, on pourra montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente) .

5) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(x^2 - y^2) .$$

1) Déterminer les points critiques de f

2) Déterminer leur nature.