Université de Tours-L3 Licence de Mathématiques-2014-15.

Examen d'Intégration 2 -Session de rattrapage-Durée 2h00

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.
Tous les calculs doivent être soigneusement justifiés

<u>Exercice 1.</u> On considère la suite de fonctions $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$g_n(x) = n\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases} .$$

1. Etudier la convergence simple de la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ dans $[0,1]$.
2. Convergence dans L^p.
   (a) Soient $p \in [1,+\infty]$, $f \in L^p([0,1])$ et $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^p([0,1])$. Montrer que
   $$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^p} = \ 0 \Longrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} .$$
   (b) Calculer $\|g_n\|_{L^p}$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.
   (c) Déterminer l'ensemble des $p \in [1,+\infty]$ tels que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^p([0,1])$.
3. On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$.
   (a) Montrer que g est bien définie sur $[0,1]$ et est Lebesgue-mesurable.
   (b) Déterminer $\int_0^1 g(x)\,dx$ et en déduire que $g \notin L^1([0,1])$.
   (c) Montrer que $L^\infty([0,1]) \subset L^p([0,1]) \subset L^1([0,1])$ pour tout $p \in]1,+\infty[$.
   (d) En déduire que $g \notin L^p([0,1])$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.

<u>Exercice 2.</u> Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} , \ \ g(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad h(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) .$$

1. Justifier que f et h sont convolables et que $f * h \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.
2. Montrer que la convolée de deux fonctions paires de $L^1(\mathbb{R})$ est une fonction paire.
3. Déterminer $f * h$.
4. Justifier que g et h sont convolables et déterminer $g * h$.
5. Justifier que la transformée de Fourier $\hat{h}$ de h est bien définie et la déterminer.
6. Justifier que la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g est bien définie et la déterminer.
7. Justifier que la transformée de Fourier $\widehat{g * h}$ de $g * h$ est bien définie et la déterminer.

Exercice 3.

1. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$.

2. En passant en coordonnées polaires (r, θ), montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+^*} r e^{-r^2}\, dr\ .$$

3. En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$.