

Examen d'Intégration 2 -Session 2-Durée 2h00

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Tous les calculs doivent être soigneusement justifiés

Question de Cours. Soient $n \geq 1$ et (f, g) un couple de fonctions boréliennes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On dit que f et g sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$y \mapsto f(x - y)g(y)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$. La convolée de f et g , notée $f * g$, est alors définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy .$$

1. Montrer que si f et g sont convolables alors $f * g = g * f$ presque partout.
2. Montrer que si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$ alors f et g sont convolables et $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q < \infty$ et $1/p + 1/q = 1$ alors f et g sont convolables et $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
4. Calculer $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ où $\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction f_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$f_n(x) = n\mathbb{1}_{]0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[} .$$

1. Montrer que la suite de fonction (f_n) converge presque partout vers 0.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 0$.
3. Montrer que la suite (f_n) est bornée dans $L^1(\mathbb{R})$.
4. La suite (f_n) converge-t-elle dans $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 2.

1. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.
2. On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Montrer que $\lambda_2(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$.
(Indic: On pourra d'abord montrer que pour tout $a > 0$, $\lambda_2(]a, a[\times \{0\}) = 0$)
3. En passant en coordonnées polaires (r, θ) , montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+^*} r e^{-r} dr .$$

4. En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Exercice 3.

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Déterminer la série de Fourier de f et en déduire les valeurs de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} .$$