

## Examen d'Analyse-UE 301-Session 2-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx \quad .$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \quad .$$

Exercice 3. Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = (-1)^n n x e^{-nx} \quad .$$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. On fixe  $n \in \mathbb{N}$  et on pose  $u_n = \sup\{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$ . Calculer  $u_n$ .
3. La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge t-elle normalement sur  $\mathbb{R}_+$  ? Uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  ?

Exercice 4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ .

1. soit  $a \in ]0, 1[$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  est normalement convergente sur  $[-a, a]$
2. En remarquant que  $x^n/n = \int_0^x t^{n-1} dt$  pour  $n \geq 1$ , calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $g_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ . Montrer que  $\sum g_n$  est normalement convergente sur  $[-1, 1]$ .
4. Calculer sa somme pour  $|x| < 1$ .
5. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$  .