

Examen d'Analyse-UE 301-Session 2-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \ln x dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad .$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n 3^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \quad .$$

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \quad .$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $u_n = \sup\{f_n(x), x \in \mathbb{R}_+\}$. Calculer u_n pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que la **série de fonctions** $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On appelle f la fonction somme de la série $\sum f_n$.
5. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0 \quad .$$

1. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution de (E) alors

$$a_0 = 1/2, \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad (q+2)(q+1)a_q = a_{q-2} \quad \text{pour} \quad q \geq 2 \quad .$$

2. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? En déduire que (E) admet une unique solution DSE₀.
3. Exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles.