# Examen de Compléments d'intégration -Session 2-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

**Exercice 1.**
Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \frac{5}{4}}\, dx \quad .$$

(Indication : On pourra ramener le calcul de $I$ à celui de l'intégrale le long du cercle unité de $\mathbb{C}$ d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.)

**Exercice 2.**

1. Montrer que l'intégrale suivante est bien définie :
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+4)}\, dx$$
2. On veut calculer la valeur de $I$. Vérifier que $f(z) = \frac{e^{iz}}{4+z^2}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et déterminer ses pôles.
3. Calculer les résidus de $f$ associés.
4. Pour $R > 0$, on définit $\Gamma_R = \{Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]\}$. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0 \ .$$
5. Montrer que $I = \dfrac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\, dx$ .
6. En déduire la valeur de $I$.

**Exercice 3.**
Soit $f$ impaire de période $2\pi$ telle que $f(t) = 1$ pour $t \in ]0, \pi[$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Déterminer la série de Fourier de $f$.
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$
puis les valeurs de
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

**Exercice 4.**

Pour $\lambda > 0$ on pose
$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\frac{\sin(t)}{t}\, dt \quad .$$

1. Montrer que $F(\lambda)$ est bien définie pour $\lambda > 0$ et que $F$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que
$$F'(\lambda) = \frac{-1}{1+\lambda^2} \quad .$$
3. Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 0$.
4. En déduire $F(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.
5. Montrer que l'intégrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$
est convergente. On admettra que $\lim_{\lambda \to 0^+} F(\lambda) = I$. En déduire la valeur de $I$.