

## Examen de Calcul Différentiel-Session 1-Durée 3h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

### Exercice 1.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $a$  un point de  $E$  et  $f$  une fonction continue de  $E$  dans  $F$  et différentiable sur  $E \setminus \{a\}$ . On suppose qu'il existe une application linéaire continue  $L$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} Df(x) = L$ . Montrer que  $f$  est différentiable au point  $a$  et que  $Df(a) = L$ . (Indic. : Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction appropriée).

### Exercice 2.

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et on note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée. On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = e^{-\|x\|^2} x.$$

1) Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad Df(x)h = e^{-\|x\|^2} h - 2 \langle x, h \rangle e^{-\|x\|^2} x.$$

2) Soit  $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ . Montrer que  $Df(x)$  est inversible pour tout  $x \in B$ .

(Indication : On pourra considérer  $\ker Df(x)$ )

3) a) Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\varphi(t) = te^{-t^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Etudier le sens de variation de  $\varphi$  et montrer que  $\varphi$  induit une bijection de  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$  sur  $\left[0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right]$ .

b) En déduire que  $f$  est injective sur la boule  $B$ .

4) Montrer que  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de la boule  $B$  dans un ouvert que l'on précisera.

### Exercice 3.

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  telle que  $T(0) = 0$ . On suppose que 1 n'est pas une valeur propre de  $DT(0)$ .

1. Montrer que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto T(x) - x$ , est un  $C^1$  difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un voisinage de 0.
2. En déduire que 0 est un point fixe isolé de  $T$ .
3. Soit  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ . Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  et un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tels que, pour  $|\lambda| < \delta$ , l'application  $T_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto T(x) - \lambda S(x)$  admet un unique point fixe  $x_\lambda$  dans  $U$ . Que peut-on dire sur la régularité de l'application  $\lambda \mapsto x_\lambda$  ?

(Indic. On pourra appliquer, en le citant correctement, le théorème des fonctions implicites à la fonction appropriée)

4. ( **Bonus** ) Application : Soit l'application  $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par

$$G(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 2xe^x + y + te^{-(x^2+y^2)} \\ \sin(z) + t \cos(x + y - z) \\ 2y \cos(x) + t \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  et un voisinage  $U \subset \mathbb{R}^3$  de 0 tels que, pour tout  $|t| < \delta$ , l'application  $G$  admet un point fixe unique dans  $U \times \{t\}$ .

(Indic. On pourra remarquer que  $G(x, y, z, t) = (T(x, y, z) + tS(x, y, z), t)$  où  $T$  et  $S$  vérifient les hypothèses de la question précédente).

#### **Exercice 4.**

$\mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et on note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée. Soient  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible et  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, Ax \rangle - \langle b, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que  $J$  est de classe  $C^2$ .
2. Calculer  $DJ(x)$  et  $D^2J(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
3. Montrer que  $A^T A$  est une matrice symétrique définie positive.
4. Déterminer l'unique point critique de  $J$  ainsi que sa nature (locale).
5. Montrer que  $J(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ .
6. En déduire  $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$ .

#### **Exercice 5. (Facultatif)**

On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = y^3 + \frac{1}{2}x^2 - xy - y - x.$$

1. Déterminer les points critiques de  $f$  et leur nature (locale).
2. Montrer que

$$\inf_{y \geq 0} f(x, y) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. Montrer que  $f$  admet un minimum (global) sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et le déterminer. (Indic. : On pourra étudier séparément  $f$  sur les 2 demi-axes  $\{0\} \times \mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ ).
4. Montrer que  $f$  admet un minimum (global) sur  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$  et le déterminer.