

Correction de l'examen d'Analyse-UE 301-Session 1-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Le but de cet exercice est de montrer que u_n a un équivalent simple en ∞ .

1. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ? : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x - x^2$. f est continue et $f([0, 1]) = [0, 1/4] \subset [0, 1]$. Donc $\forall n \geq 1, u_n \in [0, 1/4]$. De plus comme $f(x) - x = -x^2 < 0$, $\{u_n\}$ est décroissante minorée par 0 donc converge. Sa limite doit être un point fixe de f . On vérifie que l'unique point fixe de f est 0 donc $\{u_n\}$ converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
 $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Donc $\sum_{k=0}^N u_k^2 = u_0 - u_{N+1} \rightarrow u_0$ quand $N \rightarrow \infty$.
3. Montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}/u_n)$ diverge. En déduire que la série de terme général u_n diverge.
 $\sum_{k=0}^N \ln(u_{k+1}/u_k) = \sum_{k=0}^N \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0) \rightarrow -\infty$ car $u_{N+1} \rightarrow 0$.
 Donc $\sum \ln(u_{k+1}/u_k)$ diverge. $\ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}) = \ln(1 - u_n)$. Comme $u_n \rightarrow 0$, $\ln(1 - u_n) \sim -u_n$. Comme $\ln(1 - u_n) < 0$ pour tout $n \geq 0$, les séries ont même nature. Donc $\sum u_n$ diverge.
4. Montrer que $u_n < 1/(n+1)$ pour tout $n \geq 0$ et que la suite (nu_n) est croissante. En déduire que la suite (nu_n) converge vers une limite $l \in [0, 1]$.
 ok pour $n = 0$. On a vu que pour $n \geq 1, u_n \in [0, 1/4]$. Comme f est croissante sur $[0, 1/2]$, on en déduit que pour $n \geq 1, u_n < \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} < f(\frac{1}{n+1}) = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$. D'où le résultat par récurrence. Maintenant, $(n+1)u_{n+1} = (n+1)(u_n - u_n^2) = (nu_n) + u_n - (n+1)u_n^2 > nu_n$. Comme (nu_n) est croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite $l \in [0, 1]$.
5. On pose $v_n = nu_n$. Quelle est la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$? Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et en déduire que $l = 1$.
 $\sum v_{n+1} - v_n$ est une série télescopique qui converge vers l . D'un autre côté, $v_{n+1} - v_n = (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n = u_n(1 - (n+1)u_n)$. Or $1 - (n+1)u_n \rightarrow 1 - l$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc si $1 - l > 0$ alors $v_{n+1} - v_n \sim (1 - l)u_n$ qui est le terme général d'une série à termes positifs qui diverge d'après 3. Comme cela impliquerait la divergence de la série $\sum v_{n+1} - v_n$, on en déduit que $l = 1$.
6. Donner un équivalent de u_n en ∞ .
 $nu_n \rightarrow 1$ donc $u_n \sim 1/n$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0.$$

1. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution de (E) alors

$$a_0 = 1/2, a_1 = 0 \text{ et } (q+2)(q+1)a_q = a_{q-2} \text{ pour } q \geq 2.$$

Si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution alors

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2} + 4(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - a_n x^{n+2} + 2a_n x^n - 1 = 0$$

On fait des changements d'indexation pour obtenir :

$$2a_0 - 1 + 6a_1 x + \sum_{n \geq 2} [(n-1)na_n + 4na_n - a_{n-2} + 2a_n]x^n = 0$$

D'où $2a_0 - 1 = 0 \Rightarrow a_0 = 1/2, a_1 = 0$ et $(n+1)(n+2)a_n = a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

2. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? En déduire que (E) admet une unique solution DSE₀.

On déduit des égalités ci-dessus : $a_{2q+1} = 0$ pour $q \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} a_{2q} &= \frac{1}{(2q+1)(2q+2)} a_{2q-2} = \frac{1}{(2q+2)\dots(2q-1)} a_{2q-4} = \frac{1}{(2q+2)\dots 3} a_0 \\ &= \frac{2}{(2q+2)!} a_0 = \frac{1}{(2q+2)!}, \end{aligned}$$

pour $q \geq 1$. Par comparaison, le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ qui est $+\infty$. D'où $R = +\infty$. Comme $R > 0$, sa somme est une fonction DSE. D'après le 1., c'est l'unique fonction DSE₀ solution de (E).

3. Exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles.

On rappelle que $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Donc

$$\cosh x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = x^2 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^{2q}}{(2q+2)!}$$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\cosh x}{x^2}$

Problème

Pour tout $n \geq 1$ et $x > -1$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. Le but de ce problème est de montrer que la fonction somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est définie sur $] -1, +\infty[$ et est DSE₀.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $] -1, +\infty[$.

Les f_n sont continues sur $] -1, +\infty[$. Pour montrer que f est définie et continue sur $] -1, +\infty[$, il suffit de vérifier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$. On applique la version uniforme de la règle des séries alternées. $f_n = (-1)^n g_n$ avec $g_n(x) = \frac{1}{x+n}$. Il est clair pour $x \in] -1, +\infty[$ fixé, $(g_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante. De plus pour $n \geq 2$, $\sup_{x \in] -1, +\infty[} |g_n(x)| \leq \frac{1}{n-1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $] -1, +\infty[$ et par conséquent $\sum f_n$ converge uniformément sur $] -1, +\infty[$.

2. Vérifier que pour $x > -1$ et $n \geq 1$, l'intégrale $\int_0^1 t^{x+n-1} dt$ est convergente et que
- $$\int_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{1}{x+n}.$$
- $\int_0^1 t^{x+n-1} dt$ converge ssi $x + n - 1 > -1$ ce qui est vérifiée si $x > -1$ et $n \geq 1$.
- $$\int_0^1 t^{x+n-1} dt = \left[\frac{t^{x+n}}{x+n} \right]_0^1 = \frac{1}{x+n}.$$
3. En déduire que pour tout $x > -1$ et $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n+x} = - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt.$$

On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^1 \sum_{n=1}^N (-1)^n t^{x+n-1} = \int_0^1 t^{x-1} \sum_{n=1}^N (-t)^n = - \int_0^1 t^x \frac{1 - (-t)^N}{1+t}$$

d'où le résultat.

4. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$ et en déduire que pour tout $x > -1$, on a

$$f(x) = - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

On a $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{N+x} dt = \frac{1}{N+x+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. Donc

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+x} = - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

5. Justifier que pour $t \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$t^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln t)^n}{n!}.$$

On sait que le rayon de convergence de la série entière associée à la fonction exponentielle est $+\infty$. Donc pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$t^x = \exp(x \ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (\ln t)^n}{n!}$$

6. On pose $h_n(t) = \frac{x^n (\ln t)^n}{n! (1+t)}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge normalement sur tout segment $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$.
Pour $t \in [\varepsilon, 1]$, $|h_n(t)| \leq \frac{(x |\ln \varepsilon|)^n}{n!}$. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x |\ln \varepsilon|)^n}{n!} = \exp(x |\ln \varepsilon|)$$

donc h_n converge normalement $[\varepsilon, 1]$.

7. En déduire que pour $x \in]-1, 1[$,

$$-\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{1+t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n .$$

De la convergence normale de h_n on déduit :

$$-\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{1+t} dt = -\int_{\varepsilon}^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln t)^n}{n!(1+t)} \right) dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n .$$

8. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 < t < 1$ et $0 < x' < 1$,

$$\left| \frac{(x' \ln t)^n}{n!(1+t)} \right| \leq \exp(|x'| |\ln t|) = t^{-x'}$$

et en déduire que pour $\varepsilon \in]0, 1[$ et $0 < |x| < x' < 1$,

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon^{1-x'}}{1-x'} \left(\frac{|x|}{x'} \right)^n .$$

En utilisant 5. et le fait que $\ln t < 0$ pour $0 < t < 1$, on obtient

$$\left| \frac{(x' \ln t)^n}{n!(1+t)} \right| \leq \frac{(|x'| |\ln t|)^n}{n!} \leq \exp(|x'| |\ln t|) = \exp(-x' \ln t) = t^{-x'}$$

D'où,

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{(x' \ln t)^n}{n!(1+t)} \right| dt \left(\frac{|x|}{x'} \right)^n \leq \int_0^{\varepsilon} t^{-x'} dt \left(\frac{|x|}{x'} \right)^n = \frac{\varepsilon^{1-x'}}{1-x'} \left(\frac{|x|}{x'} \right)^n .$$

9. A l'aide de ce qui précède montrer que pour $0 < \varepsilon < 1$ et $-1 < x < 1$, $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)} dt$ converge et que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)} dt = 0 .$$

Pour $x' \in]|x|, 1[$, on obtient d'après 8.,

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)} \right| dt \leq \frac{\varepsilon^{1-x'}}{1-x'} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{|x|}{x'} \right)^n$$

qui converge car $|x|/x' \in]0, 1[$. La limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ se déduit directement de l'inégalité ci-dessus.

10. Déduire de 7. et 9. que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

D'après 7. et 9., pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et $x \in]-1, 1[$,

$$-\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{1+t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n .$$

Donc pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{1+t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n \end{aligned}$$

et f est DSE sur $] - 1, 1[$.