Examen d'Analyse-UE 301-Session 1-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Le but de l'exercice est de trouver un équivalent simple à u_n en ∞.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
3. Montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}/u_n)$ diverge. En déduire que la série de terme général u_n diverge.
4. Montrer que $u_n < 1/(n+1)$ et que la suite (nu_n) est croissante. En déduire que la suite (nu_n) converge vers une limite $0 \leq l \leq 1$.
5. On pose $v_n = nu_n$. Quelle est la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$? Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et en déduire que $l = 1$.
6. Donner un équivalent de u_n en ∞.

Problème

Pour tout $n \geq 1$ et $x > -1$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. Le but de ce problème est de montrer que la fonction somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$ et est DSE_0.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $]-1, +\infty[$.
2. Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$ et $n \geq 1$, l'intégrale $\int_0^1 t^{x+n-1}\, dt$ est convergente et que $\int_0^1 t^{x+n-1}\, dt = \frac{1}{x+n}$.
3. En déduire que pour tout $x > 0$ et $N \geq 1$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t}\, dt\ .$$
4. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t}\, dt \to 0$ quand $N \to \infty$ et en déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a
$$f(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt\ .$$
5. Justifier que pour $t \in]0, 1[$,
$$t^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln t)^n}{n!}$$
(on rappelle que pour $t > 0$, $t^x := \exp(x \ln t)$.)

6. On pose $h_n(t) = \frac{x^n}{n!}\frac{(\ln t)^n}{(1+t)}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{n\geq 1} h_n$ converge normalement sur tout segment $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$.

7. En déduire que pour $x \in]-1, 1[$,
$$-\int_{\varepsilon}^{1} \frac{t^x}{1+t}\, dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{\varepsilon}^{1} \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)}\, dt\Big)x^n$$

8. Montrer que pout tout $n \geq 0$, $0 < t < 1$ et $0 < x' < 1$,
$$\Big|\frac{(x' \ln t)^n}{n!(1+t)}\Big| \leq \exp(|x'||\ln t|) = t^{-x'}$$
et en déduire que pour $\varepsilon \in]0, 1[$ et $0 < |x| < x' < 1$,
$$\Big|\int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)}\, dt\Big| \leq \frac{\varepsilon^{1-x'}}{1-x'}\Big(\frac{|x|}{x'}\Big)^n \quad ;.$$

9. A l'aide de ce qui précède montrer que pour $0 < \varepsilon < 1$ et $-1 < x < 1$, $\sum_{n\geq 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)}\, dt$ converge et que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{(x \ln t)^n}{n!(1+t)}\, dt = 0$$

10. Déduire de 7. et 9. que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.