Compléments d'integration-Controle Continu

Exercice 1

Soit la série trigonométrique

$$S := \sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \ .$$

1. Donner les relations liant la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que si les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent alors S converge en tout point de $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes et convergent vers 0 alors S converge en tout point $x \neq 0\,[2\pi]$.
4. Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus que peut-on dire sur la convergence uniforme de S ? Sur la continuité de S ?(Répondre sans justifier)

Exercice 2

On suppose $0 < \delta < \pi$, $f(x) = 1$ si $|x| \leq \delta$, $f(x) = 0$ si $\delta < |x| \leq \pi$, et $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner, en justifiant, la somme de la série de Fourier de f en tout point de $[0, \pi]$.
2. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2} \quad (0 < \delta < \pi)$$
3. Utiliser la somme ci-dessus pour montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$
4. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\delta(\pi - \delta)}{2} \ (0 < \delta < \pi),$$
et en déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

5. (**Bonus**) Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

Soit $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t^2}$, $x \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Montrer que la fonction g se prolonge par continuité en une fonction f continue sur $\mathbb{R}^2$.

   Pour $x \geq 0$ on note

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t^2} dt.$$

2. Montrer que Φ a un sens pour $x \geq 0$ et que Φ est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que Φ est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et que sa derivé Ψ vérifie l'équation différentielle

$$\Psi'(x) = -\frac{1}{2} x \Psi(x),\ x \in]0, +\infty[.$$

   Indication: Deriver Φ et puis faites une intégration par partie.

4. On admet que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

   En déduire que

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt \ (x \in [0, +\infty[),$$

   et calculer $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x)$.