

## Examen Partiel d'Analyse-UE 301- Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + |\sin x|}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx .$$

Exercice 2. 1. Rappeler la définition d'une série convergente. 2. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^{n \ln n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \left( \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 \right), \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2} .$$

Exercice 3. Le but de cet exercice est de calculer la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$  est convergente.

2. Etablir que pour tout nombre réel  $y \neq 1$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} y^k = \frac{1 - y^n}{1 - y} .$$

En déduire que pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x} .$$

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx .$$

4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

et en conclure que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 .$$

Calculer  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .

Exercice 4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit l'application

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{nx}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1. Etablir que  $|\sin(y)| \leq |y|$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
3. Soit  $a > 0$ . Montrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $[-a, a]$ .
4.  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle uniformément sur  $\mathbb{R}$  ?