Compléments d'integration-Controle Continu
(durée: 1h30)

Exercice 1

(5 points)

Toute réponse devra être justifiée.

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, 2π périodique et définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Cette fonction est elle C^1 par morceaux?
2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [0, \pi] \\ x^2 & x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$
   (a) Que peut-on dire sur la convergence de la série de Fourier de f ?
   (b) Sur la somme de cette série ?
3. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa série de Fourier est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Donner sa somme.

Exercice 2

(7 points)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, 2π périodique et définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = (\pi - x)^2$.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} cos(nx).$$
   En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
2. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. **(Bonus)** En déduire les sommes des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$.

Tourner la feuille s.v.p.

Exercice 3

(8 points)

Partie I

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 avec $u(0) = 0$. On pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{u(t)}{x+t} dt.$$

1. Montrer que $f \in C^0(]0, +\infty[)$ et calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. (a) La fonction $t \to \dfrac{u(t)}{t}$ se prolonge-t-elle par continuité en $t = 0$? En déduire que $f(0)$ est bien définie.

   (b) Démontrer qu'il existe $M > 0$, telle que

   $$\forall x > 0, \ |f(x) - f(0)| \leq M(x \ln(x+1) - x \ln x).$$

   En déduire que f est continue en $t = 0$.

Partie II

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt.$

1. Montrer que F est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.
2. Montrer que $F \in C^1(]0, +\infty[)$.
3. La fonction F est-elle continue en $t = 0$? Justifier votre réponse.