

Examen de Compléments d'intégration -Session 1-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1.

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{\frac{5}{4} - \cos(x)} dx .$$

(Indication : On pourra ramener le calcul de I à celui de l'intégrale le long du cercle unité de \mathbb{C} d'une fonction méromorphe sur \mathbb{C} .)

Exercice 2.

1. Montrer que l'intégrale suivante est bien définie :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

2. Montrer que

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

3. Vérifier que $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ est méromorphe sur \mathbb{C} et déterminer ses pôles.

4. Pour $R > 0$, on définit $\Gamma_R = \{Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$. Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

5. En déduire la valeur de I .

Exercice 3.

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Déterminer la série de Fourier de f et en déduire les valeurs de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} .$$

Exercice 4.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

1. Montrer que f et g sont de classe C^1 et calculer $f(0)$.
2. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'on a $f'(x) = -2g'(x)g(x)$. (Indic : On effectuera le changement de variables : $\theta = tx$ dans l'intégrale définissant $f'(x)$).
4. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.
6. On pose $A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Démontrer l'égalité $f(x) = A^2 - (g(x))^2$.
7. En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.