Examen d'Analyse-UE 301-Session 1-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times[0,1],\quad f_n(x)=x^n\ln(\cos(x))\ .$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$.
2. Soit $0<a<1$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,a]$.
3. En déduire la limite de $\int_0^a f_n(x)\,dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que
$$\int_0^1 x^n\ln(\cos(x))\,dx\to 0 \text{ quand } n\to+\infty\ .$$

Exercice 2.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{(n+1)!}x^n$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle
$$xf'(x)+f(x)=(x+2)e^x.$$
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\int_0^x tf(t)dt=x(e^x-1).$$
4. En déduire l'expression explicite de $f(x)$.

Exercice 3.

On pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^4x^2}\ .$$

1. Montrer que cette relation définie bien une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ (*on rappelle qu'il faut citer correctement le théorème utilisé*).

2. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

et en déduire $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x)$.

3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et que pour tout rel $a > 0$, on a

$$\int_0^a f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan na}{n^3}.$$

4. Pour tout $a > 0$, montrer que f est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ (*on rappelle qu'il faut citer correctement le théorème utilisé*). En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

On se propose d'étudier la dérivabilité de f en 0.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2x^2}$$

2. On pose $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k^2x^2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^n \frac{1}{1 + t^2x^2}\,dt \leq s_n(x) \leq \frac{1}{1 + x^2} + \int_1^n \frac{1}{1 + t^2x^2}\,dt\ .$$

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(nx) - \arctan x \leq x s_n(x) \leq \frac{x}{1 + x^2} + \arctan(nx) - \arctan x$$

4. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 0 et calculer les valeurs de ses dérivées à gauche et à droite en 0. f est-elle dérivable en 0 ?

5. Représenter graphiquement f (On donnera le tableau de variations de f et on utilisera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$).