

Examen de Compléments d'intégration -Session 1-Durée 2h00

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1.

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \frac{5}{4}} dx \quad .$$

(Indication : On pourra ramener le calcul de I à celui de l'intégrale le long du cercle unité de \mathbb{C} d'une fonction méromorphe sur \mathbb{C} .)

Exercice 2.

1. Montrer que l'intégrale suivante est bien définie :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x + x^3} dx$$

2. On veut calculer la valeur de I . Vérifier que $f(z) = \frac{e^{iz}}{z+z^3}$ est méromorphe sur \mathbb{C} et déterminer ses pôles.

3. Pour $R > 0$, on définit $\Gamma_R = \{Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$. Calculer

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_R} f(z) dz \quad .$$

4. En déduire la valeur de I .

Exercice 3.

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Déterminer la série de Fourier de f et en déduire les valeurs de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad .$$

Exercice 4.

Pour $\lambda > 0$ on pose

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \frac{\sin(t)}{t} dt \quad .$$

1. Montrer que $F(\lambda)$ est bien définie pour $\lambda > 0$ et que F est C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

2. Montrer que

$$F'(\lambda) = \frac{-1}{1 + \lambda^2} \quad .$$

3. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$.
4. En déduire $F(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.
5. (Bonus) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

est convergente. On admettra que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(\lambda) = I$. En déduire la valeur de I .