

①

Correction: Ensemble triadique de Cantor

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 3x$$

$$g(u) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

$$F_0 = [0, 1], \quad \forall n \geq 0, \quad F_{n+1} = f^{-1}(F_n) \cup g^{-1}(F_n)$$

① f est une bijection sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque $f^{-1}(y) = y/3$.

de m g est une bijection sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque $g^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$.

On calcule

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$$F_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

2 - Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$G_n = \bigcup_{t \in T_n} \left[\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n} \right]$$

$$\text{avec } T_n = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k 3^{n-k}, a_k \in \{0, 2\} \right\}$$

On veut montrer que $\forall n \geq 1, F_n = G_n$.
On procède par récurrence.

• Initialisation : $F_1 = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$
 $= \left[\frac{0}{3}, \frac{0+1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{2+1}{3} \right]$
 $= G_1$

• Hérité On suppose que $F_n = G_n$
pour un certain $n \geq 1$.

$$F_{n+1} = f^{-1} \left(\bigcup_{t \in T_n} \left[\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n} \right] \right) \cup g^{-1} \left(\bigcup_{t \in T_n} \left[\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n} \right] \right)$$

$$(*) = \bigcup_{t \in T_n} \left[f^{-1} \left(\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n} \right) \cup g^{-1} \left(\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n} \right) \right]$$

L'écriture de t' en base 3 est

$$t' = 2 a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\text{donc } g^{-1}\left(\left[\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n}\right]\right) \subset G_{n+1}$$

On déduit donc de (*) que

$$F_{n+1} \subset G_{n+1}$$

Comme, de plus, lorsque

$(a_1, \dots, a_n)$ décrit $\{0, 2\}^n$, l'union des $(0, a_1, \dots, a_n)$ et des $(2, a_1, \dots, a_n)$

décrit $\{0, 2\}^{n+1}$, on obtient $F_{n+1} \subset G_{n+1}$

3° Soit $F_n \subset G_n, \forall n \geq 1$.

On va en déduire que $F_{n+1} \subset F_n, \forall n \geq 0$

$$F_1 \subset F_0 \text{ ok}$$

Soit $n \geq 1$, et $t \in F_{n+1}$

$$t = \sum_{k=1}^{n+1} a_k 3^{n+1-k} \quad \text{avec } a_k \in \{0, 2\} \quad (5)$$

$$\left[\frac{t}{3^{n+1}}, \frac{t+1}{3^{n+1}} \right] = \left[\frac{t/3}{3^n}, \frac{t/3 + 1/3}{3^n} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \frac{t}{3} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k 3^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k 3^{n-k} + a_{n+1} 3^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{avec } 0 \leq a_{n+1} 3^{-1} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{donc } \left[\frac{t}{3}, \frac{t}{3} + \frac{1}{3} \right] \subset [t', t'+1]$$

$$\text{avec } t' = \sum_{k=1}^n a_k 3^{n-k} \in T_n$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t}{3^{n+1}}, \frac{t+1}{3^{n+1}} \right] \subset \left[\frac{t'}{3^n}, \frac{t'+1}{3^n} \right] \in F_n$$

$$\text{Donc } F_{n+1} \subset F_n$$

(6)

(3) Par récurrence : F_0 est fermé.

Supposons F_n fermé alors

$f^{-1}(F_n)$ et $g^{-1}(F_n)$ sont fermés car image réciproque d'un fermé par une application continue, donc

$F_{n+1} = f^{-1}(F_n) \cup g^{-1}(F_n)$ est fermé.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = \sum_{k=1}^n 0 \times 3^{n-k} \in T_n$

$$\text{donc } \left[0, \frac{1}{3^n}\right] = \left[\frac{0}{3^n}, \frac{0+1}{3^n}\right) \subset F_n$$

$$\Rightarrow 0 \in F_n$$

Par conséquent $0 \in C = \bigcap_{n \geq 0} F_n$

(5) On veut montrer

$x \in [0, 1]$ et le développement de x en base 3 ne contient pas le chiffre 1

$$\Rightarrow x \in C$$

(7)

Soit $x \in [0, 1]$ ayant un tel développement en base 3. On peut écrire

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \quad \text{avec } a_k \in \{0, 2\} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $t_n = \sum_{i=1}^n a_i 3^{n-i} \in T_n$

$$\text{On a alors } \frac{t_n}{3^n} \leq x \leq \frac{t_{n+1}}{3^n}$$

$$\text{car } \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 3^{-k} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k}$$

$$\leq 2 \cdot 3^{-(n+1)} \sum_{q=0}^{\infty} 3^{-q}$$

$$\leq 3^{-(n+1)} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n}$$

donc $x \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 pour tout $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in C$

⑥ Par l'absurde. On suppose que C est dénombrable $\Rightarrow \exists$ une suite $\{x_i\}$ qui contient tous les éléments de C ; et on va montrer que ce n'est pas possible par un procédé d'extraction diagonale.

Soit donc $\{x_i\}$ une suite contenant tous les éléments de C . On identifie chaque elt de C par son écriture en base 3, i.e.

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i 3^{-k}, \quad a_k^i \in \{0, 2\}$$

s'écrit $x_i = 0, a_1^i a_2^i \dots$

Soit maintenant $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$

l'élément de C tel que

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } a_k^k = 2 \\ 2 & \text{si } a_k^k = 0 \end{cases}$$

$x \notin \{x_n\}$ car $\forall i \in \mathbb{N}$

$$a_i^i \neq a_i$$

$\Rightarrow C$ n'est pas dénombrable.

$$\exists - \text{ Soit } x \in C \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$$

et soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que $3^{-n_0} < \varepsilon$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{2}{3^{n_0+1}} \sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i}$$

$$= \frac{2}{3^{n_0+1}} \frac{1}{2/3} = \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$$

donc tous les éléments de C dont l'écriture en base 3 commence par

$0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont dans

$[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Il y en a une infinité.