Université de Tours-L3 Licence de Mathématiques-2014-15.

Examen d'Intégration 2 -Session 1-Durée 3h00

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.
Tous les calculs doivent être soigneusement justifiés

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré et soit $f \in L^1(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$. On suppose que $f \neq 0$ μ-presque partout sur X.

1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $f \in L^p(X,\mu)$ et
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-1}{p}} .$$
2. En déduire un majorant de $\limsup\limits_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p}$.
3. Donner la définition de $\|f\|_{L^\infty}$.
4. Soit $\varepsilon \in]0, \|f\|_{L^\infty}[$. Montrer que
$$B_\varepsilon = \{x \in X \,/\, |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$$
est un ensemble mesurable de mesure $\mu(B_\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que pour tout $p \geq 1$,
$$\|f\|_{L^p} \geq \mu(B_\varepsilon)^{1/p}(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon) .$$
6. En déduire que
$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty} .$$

Exercice 2. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \,\text{et}\, xy < 1,\ xz < 1,\ yz < 1\}$$

1. Montrer que U est un borélien non borné de $\mathbb{R}^3$.
2. On définit l'application
$$\phi \ : \ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^3 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\sqrt{yz}, \sqrt{xz}, \sqrt{xy}) \end{array}$$
Montrer que ϕ est bijective et déterminer sa bijection réciproque ϕ^{-1}.
3. Déterminer $\phi(U)$.
4. Justifier que l'intégrale I ci dessous est bien définie :
$$I = \int_U xyz \, dx \, dy \, dz$$
et la calculer à l'aide d'un changement de variables.

Problème (les 4 parties peuvent être traitées de façon indépendante).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{n}{2}\,\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } x \in [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases} .$$

Partie 1.

1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $\|g_n\|_{L^1}$, $\|g_n\|_{L^2}$, $\|g_n\|_{L^\infty}$.

1.2. Montrer que la suite (g_n) converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on déterminera.

1.3. La suite (g_n) converge-t-elle dans $L^1(\mathbb{R})$? dans $L^2(\mathbb{R})$? dans $L^\infty(\mathbb{R})$? Justifier vos réponses.

Partie 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = g_n * f$.

2.1. Justifier que f_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.

2.2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n}\Big(f(x) - f(x-y)\Big)\,dy .$$

(Indic: Utiliser la valeur de $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx$.)

2.3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(f(x) - f(x-\frac{z}{n})\Big)\,dz .$$

2.4 Montrer que

$$\|f - f_n\|_{L^1} \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\|f(\cdot) - f(\cdot - \frac{z}{n})\|_{L^1}\,dz .$$

Partie 3.

3.1 Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{\theta \to 0}\|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot - \theta)\|_{L^1} = 0 . \qquad (*)$$

3.2 Que signifie la phrase : "$C_c(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^1(\mathbb{R})$" ?

3.3 Montrer que $(*)$ est encore vraie si on suppose seulement que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

3.4 En utilisant 2.4, montrer que $\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{L^1} = 0$.

3.5 En utilisant 3.3, montrer que les f_n sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Partie 4. On pose maintenant $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

4.1 Déterminer $f_1 = g_1 * f$ puis, plus géneralement, $f_n = g_n * f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.2 Déterminer la transformée de Fourier de f.

4.3 Déterminer la transformée de Fourier de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.