

Devoir surveillé n^o 2 –Durée 2h00

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.
Tous les calculs doivent être soigneusement justifiés

Question de Cours. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx .$$

1. Montrer que \widehat{f} est bien définie et appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.
2. Montrer que \widehat{f} est une fonction continue sur \mathbb{R} .
3. On suppose, de plus, que f est de classe C^2 . Montrer que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
4. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Exercice 1. On note $C_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact. Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$ et $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite qui converge vers 1. On pose $f_n(x) = f(a_n x)$.

1. Montrer que $C_c(\mathbb{R})$ est inclus dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe $N \geq 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $n \geq N$,

$$f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [-A, A] .$$

3. Montrer que

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0 .$$

4. Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et $a > 0$ un nombre réel. Exprimer

$$\int_{\mathbb{R}} |f(ax) - g(ax)|^2 dx$$

en fonction de $\|f - g\|_{L^2}$ et de a .

5. Rappeler ce que signifie la phrase : “ $C_c(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R})$ ”.
6. Montrer que $(*)$ est aussi vraie si $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|}$ est une fonction intégrable.

2. Calculer pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ la transformée de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-i2\pi x \xi} d\xi.$$

Soit g une fonction de classe C^2 à support compact. On pose $u = f * g$.

1. Montrer que $u \in L^1(\mathbb{R})$ et que

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \widehat{g}(\xi).$$

2. Montrer que u est de classe C^2 et établir l'équation différentielle vérifiée par u

Exercice 3 Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, 1 < x^2 + 2y^2 < 4\}$ et $\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x < 4, y > 0\}$ et soit $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega', (x, y) \mapsto (x^2 + 2y^2, y/x)$.

1. Montrer que φ est de classe C^1 et calculer $\det J_{\varphi}(x, y)$.

2. On admet que φ est un C^1 -difféomorphisme de Ω dans Ω' . En déduire $\det J_{\varphi^{-1}}(z_1, z_2)$ pour tout $(z_1, z_2) \in \Omega'$.

3. On pose $G = \{(x, y) \in \Omega, y < x\}$. Déterminer $G' = \varphi(G)$.

4. On pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est intégrable sur G et calculer son intégrale sur G .

Exercice 2.

1. Soit $x > 0$. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{1+tx} dt$.

2. En déduire que pour $x > 0$ on a

$$I := \int_0^{\infty} \left(\frac{\ln(1+x)^2}{x} \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+tx)(1+sx)} dx \right) dt ds$$

3. Montrer que pour tout $(t, s) \in]0, 1[$ tels que $t \neq s$, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+tx)(1+sx)} = \frac{\ln(t/s)}{t-s}.$$

4. En déduire que $I = 2 \int_0^1 \int_0^s \frac{\ln(t/s)}{t-s} dt ds$.

5. On pose

$$\Delta := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 / 0 < t < s < 1\} \quad \text{et} \quad D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > 0, v > 0, u + v < 1\}.$$

Vérifier que $\Phi : (u, v) \mapsto \left(\frac{v}{1-u}, \frac{uv}{1-u} \right)$ est un C^1 -difféomorphisme de D dans Δ de difféomorphisme inverse : $(t, s) \mapsto (t/s, t-s)$

6. Montrer que l'on a

$$I = -2 \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy .$$

7. Ecrire le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$. En déduire le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ sur $] -1, 1[$ puis la valeur de I .

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire de période 2π telle que $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$ et $f(0) = f(\pi) = 0$.

(a) Déterminer la série de Fourier de f .

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

puis la valeur de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

(c) En exprimant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ en fonction de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, en déduire

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} .$$