

CC2 d'Algèbre.**Durée : 1h15 heures. Aucun document n'est autorisé.****Exercice 1**

Pour $i \in \{0, 1\}$ et $j \in \{0, \dots, 3\}$ on notera respectivement $\tilde{i}$ et $\hat{j}$ la classe de i modulo $2\mathbb{Z}$ et la classe de j modulo $4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

- (1) Quel est l'ordre de G ?
- (2) Déterminer l'ordre de tous les éléments de G .
- (3) Déterminer tous les sous-groupes de G .
- (4) G est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?

Exercice 2

Soit G un groupe et $a \in G$ d'ordre fini.

- (1) On suppose qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a^{pq} = a$. Montrer que $\langle a^q \rangle = \langle a^p \rangle = \langle a \rangle$.
- (2) Soit $q \in \mathbb{Z}$. En déduire que $o(a^q) = o(a)$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^{pq} = a$.

Questions subsidiaires : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur de n . On veut caractériser les éléments d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{k}$ la classe de k modulo $n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

- (3) Montrer que si $o(\bar{k}) = d$ alors $\bar{k} \in \langle \overline{(\frac{n}{d})} \rangle$.
- (4) En appliquant (2), montrer que $o(\bar{k}) = d$ si et seulement si $\bar{k} = q\overline{(\frac{n}{d})}$ avec $0 < q < d$ et $\text{pgcd}(q, d) = 1$.

Exercice 3

Soit G un groupe commutatif d'élément neutre e_G et soient $a \in G, b \in G$ d'ordres finis.

- (1) Montrer que $o(ab)$ divise $o(a)o(b)$.
- (2) On pose $n = o(ab)$. Montrer que $b^n \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$.
- (3) En déduire que si $o(a)$ et $o(b)$ sont premiers entre eux alors $b^n = e_G$ et par suite $o(ab) = o(a)o(b)$.

Exercice 4

Soit G un groupe et H un sous groupe de G d'indice fini $n \geq 2$. Pour $x \in G$, on note $\bar{x} = xH$ la classe à gauche de x modulo H .

- (1) Montrer que

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times G/H & \rightarrow & G/H \\ (g, \bar{x}) & \mapsto & g.\bar{x} = gxH \end{array}$$

est une action de G sur G/H .

- (2) Exprimer le morphisme Φ de G dans $S(G/H)$ associé.
- (3) Montrer que l'action α est transitive (une seule orbite) et en déduire que $\ker \Phi \neq G$.
- (4) On suppose que $n = 2$. Montrer qu'alors $\ker \Phi = H$ et en déduire que tout sous-groupe d'indice 2 est normal.
- (5) On suppose $n! < o(G)$. Montrer que G n'est pas simple (G possède un sous-groupe non trivial).