

CC1 d'Algèbre.**Durée : 1h15 heures. Aucun document n'est autorisé.****Exercice 1**

Déterminer si les lois suivantes munissent l'ensemble G d'une structure de groupe. Si oui, préciser s'il est abélien.

$$(1) \quad x \star y = \frac{x+y}{1+xy} \text{ sur } G =]-1, 1[.$$

$$(2) \quad x \star y = \begin{cases} ab & \text{si } a < b \\ a/b & \text{si } a \geq b \end{cases} \quad \text{sur } G = [1, +\infty[.$$

Exercice 2

Déterminer si les applications suivantes sont des morphisme de groupes. Si oui, sont-ils injectifs ? surjectifs ?

$$(1) \quad \phi_1 : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*, A \mapsto \det A.$$

$$(2) \quad \phi_2 : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2(\mathbb{R}), A \mapsto A^2.$$

$$(3) \quad \phi_3 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 2x.$$

$$(4) \quad \phi_4 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, z \mapsto |z|^{-1}.$$

Exercice 3

Soit $(G, .)$ un groupe et $H < G$.

(1) Soit $z \in G$. Montrer que $z.H.z^{-1}$ est un sous-groupe de G .

(2) Soit $z \in G$. Montrer que $z.H$ est un sous-groupe de G si et seulement si $z \in H$. Que peut-on alors dire de $z.H$ si de plus H est de cardinal fini.

Exercice 4

Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe G . On pose

$$AB = \{ab, a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 5

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On dit qu'un élément a de E est régulier si

$$\left((a \star x = a \star y) \text{ ou } (x \star a = y \star a) \right) \implies x = y.$$

On suppose que tous les éléments de E sont réguliers, et on fixe $a \in E$.

(1) Démontrer qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$.

(2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, $e \star x = x = x \star e$.

(3) Démontrer que $(E, \star)$ est un groupe.

(4) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?