Correction examen

Ex 1

On pose $z = e^{ix} \Rightarrow \cos x = \frac{z+z^{-1}}{2}$

$dz = i e^{ix} dx \Leftrightarrow dx = -i z^{-1} dz$

Donc

$$\frac{\cos x}{\cos x + 5/4} dx = -i \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{\frac{z+z^{-1}}{2} + 5/4} \frac{1}{z} dz$$

$$= -i \frac{z+z^{-1}}{z+z^{-1}+5/2} \frac{1}{z} dz$$

$$= -i \frac{z^2+1}{z(z^2+\frac{5}{2}z+1)} dz$$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\cos x + 5/4} dx = \int_C f(z) dz$$

où C est le cercle unité de $\mathbb{C}$ parcouru ds le sens trigonométrique et

$$f(z) = -i \frac{(z^2+1)}{z(z^2+\frac{5}{2}z+1)} = \frac{h(z)}{g(z)} \text{ avec } \begin{cases} h(z) = -i(z^2+1) \\ g(z) = z(z^2+\frac{5}{2}z+1) \end{cases}$$

h et g sont des polynomes donc holomorphes sur $\mathbb{C}$, f est méromorphe car quotient de fct holomorphes. La fct g

s'annule en $-2, -\frac{1}{2}, 0$. Comme ce ne sont pas des zéros de z^2+1, ce sont des pôles d'ordre 1 de f. La formule des résidus donne donc

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Res}(f, 0) \right)$$

$$g'(z) = 3z^2 + 5z + 1$$

$$\operatorname{Res}\left(f, -\tfrac{1}{2}\right) = \frac{h(-1/2)}{g'(-1/2)} = -i\,\frac{5/4}{-3/4} = i\,\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{h(0)}{g'(0)} = -i$$

d'où $I = 2\pi i \left[\frac{5}{3} i - i \right] = 2\pi i \left(\frac{2}{3} i \right)$

$$= -\frac{4}{3}\pi$$

Ex 2

1. $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x+x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x+x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

donc g est prolongeable par continuité en 0.
Il suffit donc de vérifier la cv de l'intégrale en $+\infty$. $|g(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$ dont l'intégrale converge en $+\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cv.

2. $z \mapsto iz$ et $z \mapsto e^z$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ donc $h : z \mapsto e^{iz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

$p : z \mapsto z+z^3$ est un polynôme et donc holomorphe sur $\mathbb{C}$
Par conséquent f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.
p s'annule en $0, i, -i$ où h ne s'annule pas donc les pôles de f sont $0, i, -i$ qui sont d'ordre 1.

3. Soit γ_R le demi cercle $\{Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\}$ parcouru de $\theta = 0$ vers $\theta = \pi$

$z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta}d\theta$

$e^{iz} = e^{iRe^{i\theta}} = e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$= e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta}$

Notons que pour $\theta \in [0,\pi)$, $\sin\theta \geq 0$

et donc $|e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta}| \leq 1$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = iR\int_0^{\pi} \frac{e^{i\theta} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta}}{Re^{i\theta} + R^3 e^{3i\theta}}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta}}{1 + R^2 e^{2i\theta}}\,d\theta$$

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} \left| \qquad \right| d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2 - 1}\,d\theta$$

$$\leq \frac{\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

D'un autre côté

$$(R,\theta) \mapsto i\frac{e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}}{1+Re^{2i\theta}} = \tilde{g}(R,\theta)$$

est continue sur $[0,\frac{1}{2}] \times [0,\pi)$

car $1+Re^{2i\theta} \neq 0$ pour $(R,\theta) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\pi]$

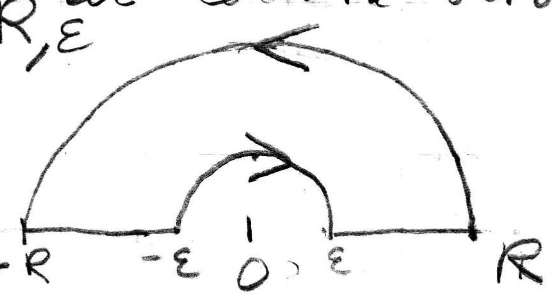
Donc $R \mapsto \int_0^\pi \tilde{g}(R,\theta)\,d\theta$ est

continue sur $[0,\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$$\lim_{R\to 0^+} \int_0^\pi \tilde{g}(R,\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \tilde{g}(0,\theta)\,d\theta$$

$$= i\int_0^\pi d\theta = i\pi.$$

4. Pour $R \geq 2$ soit $\Lambda_{R,\varepsilon}$ la courbe orientée fermée suivante



D'après le théorème des résidus

$$\int_{\Lambda_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = -i\pi e^{-1}$$

car $\operatorname{Res}(f,i) = -\frac{e^{-1}}{2}$

D'un autre côté,

$$\int_{\Lambda_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$$

$$+ \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x+x^3}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x+x^3}\,dx$$

Or $$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x+x^3}\,dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x+x^3}\,dx$$

d'où $$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x+x^3}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x+x^3}\,dx = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x+x^3}\,dx$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+x^3}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x+x^3}\,dx$$

$$= \frac{-i}{2}\left(-i\pi e^{-1} + i\pi\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$

Ex 3

f est 2π periodique, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. f est paire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\left[\frac{\sin(nx)}{n}x^2\right]_0^{\pi}} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\cancel{\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi}}\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

La série de Fourier de f est donc

$$Sf = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Comme f est continue et C^1 par morceaux, d'après Dirichlet, $Sf(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et somme est $f(x)$. Pour $x = 0$ on obtient

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

Par Parseval on a

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\pi\left[2\frac{\pi^4}{9} + 16\sum \frac{1}{n^4}\right] = 2\frac{\pi^5}{5}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right] = \frac{\pi^4}{90}$$

Ex 4

1. On pose $f(\lambda,t) = e^{-\lambda t}\,\dfrac{\sin t}{t}$

$(\lambda,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$

f est continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$. On peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$ en posant $f(\lambda,0) = 1$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+$

En effet, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(\lambda_n,t_n)\to(\lambda,0)$

$$f(\lambda_n,t_n) = e^{-\lambda_n t_n}\,\frac{\sin t_n}{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

car $\lambda_n t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\forall t\geq 1$, $|f(1,t)| \leq e^{-t}$ dont l'intégrale cv en $+\infty$. Comme $t\mapsto f(1,t)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ (d'après ce qui précède) on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} f(1,t)\,dt \quad \text{cv}.$$

$\forall(\lambda,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,t) = -e^{-\lambda t}\sin t$$

$\forall \lambda > 0,$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,t)\right| \leq e^{-\lambda t} \quad \text{et} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

donc $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(\lambda,t)\, dt \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$

et $F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t \, dt$

2_ $\forall \lambda > 0,$

$$F'(\lambda) = -\operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{it} dt$$

$$= -\operatorname{Im} \left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-\lambda}\right)$$

$$= -\frac{1}{1+\lambda^2}$$

3_ $\forall t \geq 0 \quad \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$ donc

$$\left|e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\right| \leq e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\right| dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

4. D'après 2

$$F(\lambda) = C - \arctan \lambda$$

et 3 implique $C = \pi/2$

d'où $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan \lambda$, $\forall \lambda > 0$.

5.

$t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ cv.

D'un autre côté, $\forall A > 1$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$= \cos 1 - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or $\frac{\cos A}{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ et $\int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$ cv car

$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale cv en $+\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ cv

$$I = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan \lambda = \frac{\pi}{2}.$$