

Algèbre : Contrôle continu n° 2

Durée de l'épreuve : 1h30

Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1.

1. Montrer que l'ensemble G des matrices

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{bmatrix}$$

où x, y et z sont dans \mathbb{Z} est un groupe, non abélien, pour le produit matriciel (On pourra utiliser que $GL(3, \mathbb{C})$ muni du produit matriciel est un groupe).

2. Déterminer le centre de ce sous-groupe.

Exercice 2. Soit S_3 le groupe symétrique sur $\{1, 2, 3\}$. On note $H = \{Id, (12)\}$ et $K = \{Id, (123), (132)\}$.

1. H est-il distingué dans S_3 ? Quel est son indice dans S_3 ?
2. Déterminer les classes à gauche modulo H puis les classes à gauche modulo K .

Soit G un groupe et M un sous-groupe de G . On définit le normalisateur de M dans G par

$$N_G(M) = \{g \in G / gMg^{-1} = M\}.$$

3. Montrer que $N_G(M)$ est un sous-groupe de G contenant M .
4. Montrer que M est normal dans $N_G(M)$
5. Déterminer $N_{S_3}(H)$ et $N_{S_3}(K)$.

Exercice 3. Pour $i \in \{0, \dots, 5\}$ on note \bar{i} la classe de i modulo $6\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} .

1. Donner l'ordre de $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Pour $i \in \{0, 1\}$ et $j \in \{0, \dots, 3\}$ on notera respectivement \tilde{i} et \hat{j} la classe de i modulo $2\mathbb{Z}$ et la classe de j modulo $3\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} . Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

3. Quel est l'ordre de G ?
4. Déterminer $\langle(\tilde{1}, \hat{1})\rangle$. Quel est l'ordre de $(\tilde{1}, \hat{1})$ dans G ?
5. G est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 4.

1. Montrer que tout groupe d'ordre p avec p premier est cyclique.
2. Ce résultat est-il encore vrai pour les groupes d'ordre p^n avec p premier et $n \geq 2$? Justifier votre réponse.
3. Soit H un groupe cyclique d'ordre p^k avec p premier et $k \geq 2$ et soit h un générateur de H . Déterminer l'ordre de h^{k-1} .
4. En déduire que tout groupe d'ordre p^n avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins un sous-groupe cyclique d'ordre p .