**Université François Rabelais Tours** **2013-2014**
**L3 Mathématiques**

# Algèbre : examen session juin 2014
# Durée : 2 heures

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des documents et des instruments de calcul N'EST PAS autorisé.*

**Exercice 1 :** On considère les éléments de $\mathfrak{S}_8$ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer $\sigma_1$ et $\sigma_2$ en produit de cycles à supports disjoints.
2. En déduire l'ordre et la signature de $\sigma_1$ et $\sigma_2$
3. Calculer $\sigma_1^{173}$ et $\sigma_2^{2010}$.

**Exercice 2 :**

1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ?
2. Précisez l'ordre de chaque élément du groupe $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$. Est-il cyclique ?
3. Déterminer dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, les solutions de l'équation $x^2 + x + \bar{1} = 0$ d'inconnue $x$ .

**Exercice 3 :** Soit $G$ un groupe fini multiplicatif de cardinal $n$ et $H, K$ deux sous groupes de $G$ de cardinaux respectifs $p$ et $q$.

1. Montrer que le cardinal de $U = H \cap K$ divise $pgcd(p, q)$.
2. Que vaut $U$ lorsque $pgcd(p, q) = 1$ ?
3. On suppose que $H$ est un sous-groupe normal dans $G$. Montrer que $HK$ l'ensemble des produits de la forme $hk$ avec $h \in H$ et $k \in K$ est un sous-groupe de $G$.
4. On suppose de plus que $pgcd(p, q) = 1$. Montrer que le cardinal du groupe $HK$ vaut alors $pq$. On pourra montrer que tout élément $g$ de $HK$ se décompose de façon unique sous la forme $g = hk$ avec $h \in H$ et $k \in K$.

**Exercice 4 :** Soit $n$ un entier tel que $n \geq 2$ et soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique associé. Le but de cet exercice est de décrire les homomorphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$

1. Soit $(i, j)$ une transposition de $\mathfrak{S}_n$.
   (a) Soit $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\sigma(i, j)\sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$.
   (b) En déduire que pour toute transposition $(i', j')$ de $\mathfrak{S}_n$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(i, j)\sigma^{-1} = (i', j')$.
2. Soit $\chi$ un homomorphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$. En utilisant 1.$(b)$, montrer qu'il existe un nombre complexe $\alpha$ tel que $\chi(\tau) = \alpha$ pour toute transposition $\tau = (i, j)$ de $\mathfrak{S}_n$.
3. Rappeler quel est l'ordre d'une transposition et en déduire que $\alpha \in \{\pm 1\}$.
4. Déduire qu'il existe exactement 2 morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ et les déterminer .