Algèbre : examen session décembre 2013
Durée : 2 heures

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des documents et des instruments de calcul N'EST PAS autorisé.

Exercice 1 : On se donne la permuation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 5 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoints.
2. Que vaut σ^{146} ?
3. A-t-on $\sigma \in \mathcal{A}_8$?
4. Déterminer σ^{-1}.

Exercice 2 :

1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?
2. Précisez l'ordre de chaque élément du groupe $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$. Est-il cyclique ?
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, les équations $x^2 = \overline{0}$ puis $x^2 - \overline{1} = \overline{0}$.

Exercice 3 : On considère l'ensemble des matrices

$$G=\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } \det A = 1\}.$$

1. Exprimer A^{-1} en fonction de a, b, c et c et vérifier que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $\theta : G \to G$ telle que $\theta(A) = A^{-1}$ est une bijection. S'agit-t-il d'un automorphisme de G ?
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On note $H = \langle M \rangle$. Justifier que le groupe H est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et donner un isomorphisme simple de H dans $\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $B \in G$ avec $\mathrm{tr}(B) = 0$. Montrer que B est d'ordre 4.
5. On suppose que $A \in G$ est telle que a, b, c et c sont strictement positifs. Montrer que $\langle A \rangle$ est d'odre infini.

Exercice 4 : Soit G un groupe fini de cardinal n et p un nombre premier tel que p divide n. On note $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \cdots x_p = 1\}$.

1. Combient y-a-t-il d'éléments $(x_1, \dots, x_p)$dans $X = G^p$?
2. Montrer que $(x_1, \dots, x_p) \in E$ si et seulement si $x_p = (x_1 x_2 \cdots x_{p-1})^{-1}$. En déduire qu'il y a n^{p-1} éléments dans E.
3. Soit $\sigma = (1 \cdots p)$ dans le groupe symétrique S_p et $G = \langle \sigma \rangle$. Justifier que G est cyclique et contient p éléments.
4. Pour tout $x \in E$, on pose
$$\sigma \cdot (x_1, \dots, x_p) = (x_p, x_1 \dots, x_{p-1}).$$
Montrer que l'on peut alors facilement en déduire une action de G sur E.
5. Montrer que les orbites pour cette action ont soit un seul élément, soit p éléments.
6. Supposons que l'orbite de $(x_1, \dots, x_p) \in G^p$ soit réduite au seul élément $(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $x_1 = \cdots = x_p$ et que $x = e_G$ ou x est d'odre p.
7. En utilisant l'équation des classes, en déduire que G possède forcément un élément d'ordre p.