Ministère de
l'enseignement supérieur
et de la recherche

Secrétariat Général
Direction générale des ressources humaines

Rapport sur l'agrégation interne et le CAERPA de mathématiques

Année 2008

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Composition du jury

1 Composition du jury

Président		
M. André GRAMAIN	professeur des universités	Lyon
Vice-présidents		
M. Robert CABANE	inspecteur général de l'éducation	nationale
M. Hervé QUÉFFELEC	professeur des universités	Lille I
M. Marc ROSSO	professeur des universités	ENS, Paris
M. Eric VAN DER OORD	inspecteur général de l'éducation	nationale
Secrétaire général		
M. Jean-Marie CHEVALLIER	maître de conférences	Orléans
Examinateurs		
Mme Anne-Marie ÆBISCHER	professeur agrégé	université de Besançon
Mme Florence BANTÉGNIES	professeur de chaire supérieure	lycée Saint-Louis, Paris
M. Dominique BARBOLOSI	maître de conférences	Aix-Marseille III
Mme Françoise BERQUIER	maître de conférences	Lille I
Mme Sylvie BONNET	professeur de chaire supérieure	lycée Victor Hugo, Besançon
M. Hassan BOUALEM	maître de conférences	Montpellier
Mme Anne BOUTTELOUP	professeur de chaire supérieure	lycée Bellevue, Toulouse
M. Robert BROUZET	maître de conférences	Montpellier
M. Joseph CESARO	inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Nice
M. René CORI	maître de conférences	Paris VII
M. Gérard DEBEAUMARCHÉ	professeur de chaire supérieure	lycée Clémenceau, Reims
M. Thierry DUGARDIN	professeur de chaire supérieure	lycée Moissan, Meaux
Mme Viviane GAGGIOLI	professeur de chaire supérieure	lycée La Martinière, Lyon
Mme Christine GEORGELIN	maître de conférences	Tours
Mme Michèle GRILLOT	maître de conférences	Orléans
M. Christophe HENOCQ	professeur de chaire supérieure	lycée Jacques Decour, Paris
M. Michel HENRI	professeur de chaire supérieure	lycée Camille Guérin, Poitiers
Mme Marie-Emmanuelle JOINT	professeur agrégé	lycée Brizeux, Quimper
M. Salim KOBEISSI	professeur agrégé	université de Grenoble II
M. Thierry LAMBRE	professeur des universités	Clermont-Ferrand II
M. Pierre LETERRIER	professeur agrégé	lycée Lakanal, Sceaux
Mme Geneviève LORIDON	inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Besançon
M. Jean-Paul MARGIRIER	professeur agrégé	lycée du Parc, Lyon
Mme Marie-Hélène MOURGUES	maître de conférences	Créteil
Mme Claudine PICARONNY	maître de conférences	ENS, Cachan
M. Marc POLZIN	maître de conférences	Bordeaux I
Mme Françoise PRADIÉ	professeur chaire supérieure	lycée Gustave Eiffel, Bordeaux
Mme Martine RAYNAL	inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie d'Aix-Marseille
Mme Janine REYNAUD	inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Lyon
Mme Nicole RIGAL	maître de conférences	Paris V
M. Philippe RODOT	professeur de chaire supérieure	lycée Carnot, Dijon
M. David RUPPRECHT	professeur agrégé	lycée Loritz, Nancy
M. Claude ROUFF	professeur de chaire supérieure	lycée Blaise Pascal, Clermont-Fd
M. Bernard SARAMITO	professeur des universités	Clermont II
M. Eric SIGWARD	inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Strasbourg
M. Frédéric SUFFRIN	professeur de chaire supérieure	lycée Kléber, Strasbourg
M. Jean-Pierre VIAL	professeur de chaire supérieure	lycée Buffon, Paris
M. Georges VINAVER	professeur agrégé	univeristé d'Évry
Mme Valérie WAJS	professeur agrégé	lycée Marie Laurencin, Paris

Statistiques

2 Statistiques

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2008

RÉSULTATS STATISTIQUES

Les épreuves écrites ont eu lieu les 24 et 25 janvier 2008, la liste d'admissibilité a été signée le 25 mars 2008 :

Agrégation interne : 257 admissibles ; CAERPA : 22 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 20 au 27 avril 2007, au lycée Janson de Sailly à Paris. La liste d'admission a été signée le 28 avril 2007 :

Agrégation interne : 107 admis ; CAERPA : 11 admis.

Remarques : Comme on peut le constater sur les tableaux d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est en légère augmentation cette année, après une augmentation sensible en 2006. Le nombre de postes est stable au concours d'agrégation, mais en diminution au concours de l'enseignement privé. Tous les contrats proposés au concours de l'enseignement privé n'ont pu être pourvus, mais le nombre d'admissibles comme d'admis au concours du privé a doublé par rapport à 2007.

Évolution des concours

AGRÉGATION INTERNE

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989	120	2951	1706	232	120+52*
1990	225	2386	1326	444	225+85*
1991	352	2575	1299	510	352+43*
1992	331	2538	1195	508	331+34*
1993	334	2446	1184	478	334+13*
1994	330	2520	1244	475	330+12*
1995	330	2211	1212	446	330
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107

*liste supplémentaire

CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989					
1990					
1991	13				10
1992	20	269	102	22	14
1993	40	302	128	42	25
1994	36	331	156	57	36
1995	31	340	155	53	31
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11

2.1 Statistiques de l'agrégation interne 2008

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	2195	1629	257	107
Femmes	744	549	71	36
Français et U.E.	2194	1629	257	107
Union Européenne	3	3	0	0
Étrangers hors UE	1	0	0	0
Moins de 50 ans	2052	1528	257	107
Moins de 45 ans	1911	1434	253	104
Moins de 40 ans	1679	1260	241	97
Moins de 35 ans	1167	875	189	80
Moins de 30 ans	285	206	35	17

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	5	3	11	10	9	12	11	10
épreuve 2 (sur 20)	8	5	3	10	10	9	11	10	9
Total écrit (sur 200)	76	55	37	107	97	91	113	104	94

Écrit, épreuve 1 moyenne des admis 10.77

Écrit, épreuve 2 moyenne des admis 10.04

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	2	2	1	1	1	0
17	0	0	0	2	2	1	2	2	0
16	0	0	0	2	2	1	2	2	0
15	2	2	1	4	4	3	2	2	0
14	2	2	1	12	12	8	6	6	3
13	5	5	4	26	26	17	21	20	14
12	18	18	12	49	48	29	40	39	23
11	52	52	36	103	96	58	69	63	33
10	107	107	60	199	166	85	164	133	57
9	213	213	95	323	216	98	312	201	87
8	349	257	107	493	251	106	439	234	100
7	544	257	107	649	254	106	618	255	106
6	728	257	107	804	256	107	817	257	107
5	930	257	107	1020	257	107	993	257	107
4	1170	257	107	1233	257	107	1208	257	107
3	1341	257	107	1358	257	107	1423	257	107
2	1503	257	107	1525	257	107	1569	257	107
1	1596	257	107	1616	257	107	1631	257	107
0	1629	257	107	1669	257	107	1642	257	107

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	14	10	7	16	14	12
épreuve 2 (sur 20)	12	9	7	14	12	9
Total général (sur 400)	220	199	180	239	223	213

le total général est ramené sur 20

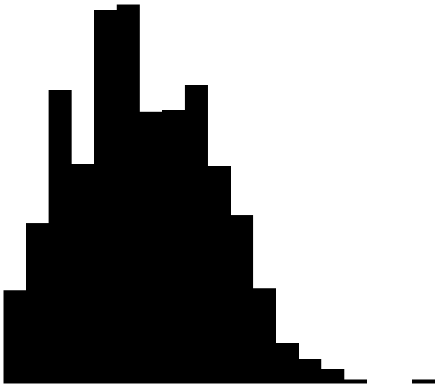
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	1	1	0	0
19	0	0	4	4	2	2
18	0	0	9	9	4	4
17	0	0	17	17	6	6
16	0	0	28	27	12	12
15	1	1	39	37	20	20
14	5	5	66	61	35	29
13	10	10	81	72	55	45
12	25	25	98	83	75	55
11	64	64	113	87	91	63
10	124	107	143	101	119	79
9	188	107	157	104	143	86
8	222	107	179	104	179	93
7	244	107	197	105	202	97
6	251	107	225	106	226	102
5	251	107	234	106	239	103
4	251	107	250	107	251	107
3	251	107	252	107	251	107
2	251	107	252	107	251	107
1	251	107	252	107	251	107
0	251	107	252	107	251	107

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	108	68	11	5
BESANCON	23	20	5	2
BORDEAUX	81	57	8	4
CAEN	43	24	3	1
CLERMONTFERRAND	40	34	6	0
DIJON	44	38	7	2
GRENOBLE	87	62	5	3
LILLE	182	138	21	9
LYON	89	59	10	5
MONTPELLIER	95	75	14	4
NANCY METZ	79	57	10	1
POITIERS	58	44	7	3
RENNES	41	30	1	1
STRASBOURG	53	40	7	6
TOULOUSE	82	56	6	5
NANTES	69	54	9	3
ORLEANS TOURS	75	55	8	4
REIMS	33	27	1	0
AMIENS	77	67	7	6
ROUEN	71	58	8	4
LIMOGES	25	22	4	0
NICE	81	60	15	3
CORSE	18	12	0	0
REUNION	89	56	15	4
MARTINIQUE	26	19	2	2
GUADELOUPE	44	33	4	0
GUYANNE	15	10	1	0
PARIS/CRET/VERS	454	341	61	30
POLYNESIE	13	13	1	0

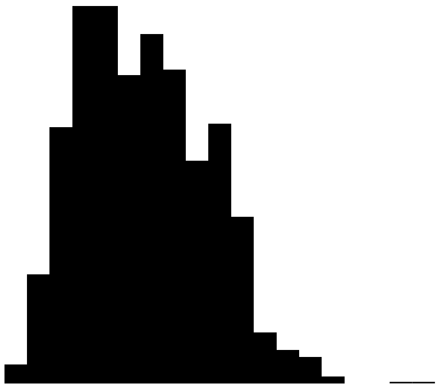
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	26	16	2	1
ENSEIGNANT SUP	26	14	5	0
ENS.FPE.TIT	66	47	12	4
AG FPE	32	18	3	2
AGREGE	19	14	2	1
CERTIFIE	1923	1458	232	99
PLP	103	62	1	0

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	3	2	0	0
ENS.TIT.MEN	2090	1559	240	100
AG.FONC.PUB.ETA	102	68	17	7

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	41	27	1	0
AIX	106	67	11	5
AMIENS	77	67	7	6
BESANCON	23	20	5	2
BORDEAUX	61	44	8	4
CAEN	43	24	3	1
CLERMONT FERRAN	40	34	6	0
DIJON	44	38	7	2
GRENOBLE	87	62	5	3
LILLE	175	133	20	8
LIMOGES	25	22	4	0
LYON	89	59	10	5
MONTPELLIER	95	75	14	4
NANCY	79	57	10	1
NANTES	69	54	9	3
NICE	80	59	14	3
ORLEANS	75	55	8	4
PARIS	454	341	61	30
POITIERS	53	39	6	3
REIMS	33	27	1	0
RENNES	41	30	1	1
ROUEN	71	58	8	4
STRASBOURG	53	40	7	6
TOULOUSE	82	56	6	5
CAYENNE	15	10	1	0
DZAOUDZI-MAMOUT	14	10	2	1
FORT DE FRANCE	26	19	2	2
NOUMEA	7	5	1	1
PAPEETE	13	13	1	0
POINTE A PITRE	44	33	4	0
SAINT DENIS REU	75	46	13	3
RABAT	5	5	1	0



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

2.2 Statistiques du CAERPA 2008

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	356	245	22	11
Femmes	148	108	10	7
Moins de 50 ans	317	218	22	11
Moins de 45 ans	288	194	20	10
Moins de 40 ans	241	162	18	8
Moins de 35 ans	159	109	13	7
Moins de 30 ans	40	28	5	1

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	6	4	2	11	10	9	14	11	10
épreuve 2 (sur 20)	6	4	3	12	10	9	13	12	10
Total écrit (sur 200)	62	41	27	110	99	95	130	110	96

Écrit, épreuve 1 moyenne des admis 10.63

Écrit, épreuve 2 moyenne des admis 10.81

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	1	1	1	0	0	0
14	0	0	0	2	2	2	0	0	0
13	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	2	2	2	3	3	3	8	8	5
11	5	5	5	8	8	5	9	9	6
10	10	10	7	18	14	8	16	15	8
9	19	19	10	30	17	10	25	20	11
8	30	22	11	43	20	10	35	20	11
7	44	22	11	61	21	10	54	22	11
6	66	22	11	80	22	11	72	22	11
5	82	22	11	109	22	11	100	22	11
4	127	22	11	148	22	11	143	22	11
3	175	22	11	180	22	11	203	22	11
2	212	22	11	218	22	11	229	22	11
1	238	22	11	244	22	11	243	22	11
0	245	22	11	255	22	11	246	22	11

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	10	5	16	13	11
épreuve 2 (sur 20)	12	9	8	16	12	10
Total général (sur 400)	223	205	170	244	223	218

le total général est ramené sur 20

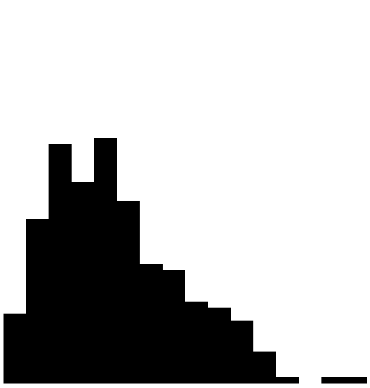
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	1	1
17	0	0	1	1	1	1
16	0	0	2	2	2	2
15	0	0	3	3	2	2
14	1	1	3	3	2	2
13	1	1	5	5	4	4
12	3	3	7	7	6	5
11	7	7	10	9	7	6
10	11	11	11	9	9	8
9	14	11	14	10	12	10
8	16	11	15	11	16	11
7	19	11	15	11	16	11
6	21	11	15	11	17	11
5	21	11	17	11	17	11
4	21	11	22	11	20	11
3	21	11	22	11	21	11
2	21	11	22	11	21	11
1	21	11	22	11	21	11
0	21	11	22	11	21	11

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	14	10	0	0
BESANCON	3	3	0	0
BORDEAUX	17	12	2	2
CAEN	5	3	1	0
CLERMONTFERRAND	12	11	3	2
DIJON	7	5	0	0
GRENOBLE	12	9	2	1
LILLE	47	36	2	0
LYON	23	18	1	1
MONTPELLIER	16	9	0	0
NANCY METZ	15	9	1	0
POITIERS	6	3	0	0
RENNES	20	15	2	1
STRASBOURG	8	6	1	0
TOULOUSE	6	4	0	0
NANTES	24	15	0	0
ORLEANS TOURS	6	5	2	0
REIMS	3	3	0	0
AMIENS	10	7	0	0
ROUEN	8	4	0	0
LIMOGES	2	1	0	0
NICE	4	4	0	0
REUNION	3	1	0	0
MARTINIQUE	1	1	0	0
GUADELOUPE	4	2	0	0
GUYANNE	1	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	74	45	5	4
POLYNESIE	5	3	0	0

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	21	16	0	0
MAIT-DOC REM TI	296	213	21	10
MAIT-DOC REM MA	39	16	1	1

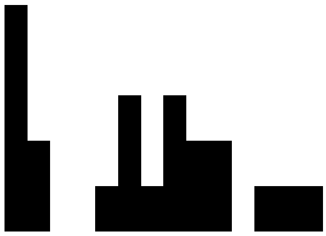
catégories				
	I	P	a	A
ENSEIGN PRIVE	356	245	22	11

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	119	77	0	0
BORDEAUX	12	7	1	1
CAEN	5	3	1	0
CLERMONT FERRAN	12	11	3	2
GRENOBLE	12	9	2	1
LILLE	45	35	2	0
LYON	23	18	1	1
NANCY	15	9	1	0
ORLEANS	6	5	2	0
PARIS	74	45	5	4
PAU	5	5	1	1
RENNES	20	15	2	1
STRASBOURG	8	6	1	0

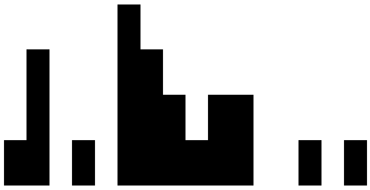


Écrit 1

Écrit 2



Oral 1



Oral 2

Programme

3 Programme du concours

3.1 Avertissement

Le programme du concours est inchangé pour 2009, se reporter au BO n ° 3 du 29 avril 1999.

L'attention des candidats doit cependant être attirée sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire, notamment en ce qui concerne des éléments de statistique inférentielle et de théorie des graphes.

Il est vraisemblable que le programme du concours sera modifié prochainement pour préciser les contenus associés à cette évolution, ainsi qu'à l'évolution des programmes de BTS.

3.2 Programme de l'Agrégation Interne et CAERPA de Mathématiques

Un professeur de mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'Agrégation interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'Enseignement Secondaire étant d'autre-part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances. S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

A. PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B. PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.

Ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$.

Relation d'équivalence et ensemble quotient.

2. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.

Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.

Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.

Aucun développement théorique n'est au programme.

3. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ des nombres réels, $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

b) Anneaux et corps (Écrit seulement)

Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans $\mathbf{Z}$).

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$. Nombres transcendants.

c) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $\mathbf{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun mutiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.

Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

d) Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4. Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).

Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5. Algèbre linéaire sur un sous-corps de C

a) Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espace vectoriel $L(E, F)$. Algèbre $L(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.

Étant donné u de $L(E, F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

b) Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.

Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

c) Matrices

Espaces $M_{p,q}(\mathbf{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Isomorphisme canonique avec $L(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation de sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

d) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul du rang.

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, \mathbf{K})$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

e) Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes simples.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

f) Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et E^* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

g) Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Algèbre $\mathbf{K}[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

h) Cas où le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $L(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels.

Exemples de parties denses de $L(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $L(E)$.

i) Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6. Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est $\mathbf{R}$.

Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

7. Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

a) Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$.

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.

Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours.

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

8. Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.

Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.

Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Section plane d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

9. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).

Groupes affines et groupes euclidiens.

Propriétés affines et euclidiennes des coniques.

Notions différentielles de caractère affine et métrique.

Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ des réels et complexes. La construction de $\mathbf{R}$ étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de $\mathbf{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemple d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.

Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.

Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.

Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

i) Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties.

Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

j) Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de continuité : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x, t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de f'_x(x,t) est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.

Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

k) Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.

Approximation d'une solution d'équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.

Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.

Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

11. Analyse à une variable complexe

a) Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

b) Extension à C des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus.

Application à la mesure des angles.

12. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Exponentielle d'un endomorphisme.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même. Application aux approximations successives.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.

Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

i) Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions e^{inx}. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles $S_n(f,x) = \sum_{-n \leqslant k \leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$.

Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et Féjer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

13. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}^p$.

a) Topologie de $\mathbf{R}^n$.

Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

b) Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.

Théorème admis : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extrema issus de la géométrie.

Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^k$.

c) Équations différentielles

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

Dimension de l'espace vectopriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coeffients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans deuxième membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).

Solutions d'une équation $x' = f(t,x)$, ou $x'' = f(t,x,x')$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique et en géométrie différentielle.

14. Calcul intégral et probabilités

a) Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité relativement aux ensembles.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.

Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Théorème de Fubini : Si f est une fonction de deux variables continue de module intégrable, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.

Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas de fonctions de n variables.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires et de volumes.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou σ-algèbre) des évènements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Etude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

c) Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B[A]$ de A sachant B si $P[B]$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'évènements.

d) Variables aléatoires réelles

Etant donné un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, on appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que l'image réciproque $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{I})$ de tout intervalle I de $\mathbf{R}$ appartienne à la tribu $\mathcal{F}$. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.

Variables aléatoires réelles possèdant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité* sur $\mathbf{R}$, toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $P[\{X \in I\}] = \displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Fonction de répartition et moments (espérance, variance et écart type) d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.

Si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \Phi(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

e) Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :

Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité sur* $\mathbf{R}^p$ toute fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégrales multiples »). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ possède la loi de densité f si, pour tous intervalles $I_1, ..., I_p$ de $\mathbf{R}$,

$$P[\{X_1 \in I_1\} \cap ... \cap \{X_p \in I_p\}] = \int_{I_1} \ldots \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p) \, \mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_p.$$

Soit $X = (X_1, \ldots, X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de $\mathbf{R}^p$ et telle que la fonction $|\psi| f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^p$. On admettra que $\psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}[\psi(X)] = \int_{\mathbf{R}} \ldots \int_{\mathbf{R}} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_p) f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \, \mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_p.$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possèdant une loi avec densité. Loi normale.

f) Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Les résultats suivants sont admis : Loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possèdant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

15. Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

a) Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. plan osculateur.

b) Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Abscisse curviligne.

En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.

En dimension 3, repère de Frenet, courbure, torsion.

c) Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

Épreuves écrites

4 Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énoncé de la première épreuve écrite

Notations

On désigne par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E. On désigne par $\mathrm{End}(\mathrm{E})$ l'algèbre des endomorphismes de E et par $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ le groupe des endomorphismes inversibles de E. On note $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$ l'application identique de E.

Si u est un endomorphisme de E, on note ${}^t u$ l'endomorphisme de E^* transposé de u ; si X est une partie de $\mathrm{End}(\mathrm{E})$, on note ${}^t\mathrm{X}$ l'ensemble des transposés des élements de X.

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et soit x un vecteur de E. Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire ux pour désigner l'image $u(x)$ du vecteur x par l'application u.

Soit n un entier $\geqslant 1$; on désigne par $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ l'algèbre des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes. On note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i-ème ligne et j-ième colonne qui est égal à 1. On note $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ le groupe des matrices inversibles et $\mathbf{1}_n$ la matrice unité de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbf{C}$-algèbres possédant chacune un élément unité ; un *morphisme unitaire* d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application $\mathbf{C}$-linéaire qui préserve les produits et les éléments unités.

Les deux premières parties sont indépendantes. La sixième partie est indépendante des précédentes.

Partie I

1) Soit W un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $p_1,\ldots,p_n$ des endomorphismes de W. Pour $i=1,\ldots,n$, on note W_i l'image de p_i.

Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace vectoriel W est somme directe des sous-espaces W_i et, pour $i=1,\ldots,n$, p_i est le projecteur d'image W_i parallèlement à la somme directe des W_j, $j\neq i$.

(ii) Pour $i=1,\ldots,n$, on a ${p_i}^2=p_i$; pour $j\neq i$, on a $p_i\,p_j=0$; et on a $p_1+\ldots+p_n=\mathbf{1}_{\mathrm{W}}$.

2) Soit toujours W un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier $\geqslant 1$ et soit $\rho:\mathrm{M}_n(\mathbf{C})\to\mathrm{End}(\mathrm{W})$ un morphisme unitaire d'algèbres.

a) Pour $i=1,\ldots,n$, on note p_i l'endomorphisme $\rho(\mathrm{E}_{i,i})$. Démontrer que les endomorphismes p_i satisfont à la condition (ii) de la question (I.1).

b) Pour $i=1,\ldots,n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que la restriction de $\rho(\mathrm{E}_{i,j})$ à W_j induit un isomorphisme de W_j sur W_i.

c) Dans la suite de cette question, on fixe une base $(w_1,\ldots,w_r)$ de l'espace vectoriel W_1. On pose

$$v_1=w_1,\quad v_2=\rho(\mathrm{E}_{2,1})w_1,\quad \ldots\quad ,\quad v_n=\rho(\mathrm{E}_{n,1})w_1.$$

Démontrer que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre et que, pour tous entiers s, t et k compris entre 1 et n, on a

$$\rho(\mathrm{E}_{s,t}) v_k = \delta_{t,k} v_s,$$

où le symbole de Kronecker $\delta_{t,k}$ vaut 1 lorsque $t = k$, et vaut 0 sinon.

d) Plus généralement, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on note V_j le sous-espace vectoriel de W engendré par les vecteurs $\rho(\mathrm{E}_{k,1}) w_j$, pour $k = 1, \ldots, n$. Démontrer que W est somme directe des sous-espaces V_j, $1 \leqslant j \leqslant r$.

e) Démontrer qu'il existe une base de l'espace vectoriel W dans laquelle, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(\mathrm{M})$ est la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}\,(\mathrm{M}, \ldots, \mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{M} \end{pmatrix}$$

Partie II

Dans cette partie, on désigne par E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une partie X de $\mathrm{End(E)}$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de X sont $\{0\}$ et E. On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathrm{End(E)}$ qui contient $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$, et on se propose de démontrer qu'elle est égale à $\mathrm{End(E)}$.

1) Soient u et v des éléments de $\mathrm{End(E)}$ qui commutent entre eux. Démontrer que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

2) Soit X une partie irréductible de $\mathrm{End(E)}$. Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de X est l'ensemble des endomorphismes scalaires.

3) Rappelons que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathrm{End(E)}$ contenant $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$. Démontrer que ${}^t\!\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathrm{End(E^*)}$.

4) Soit x un vecteur non nul de E. Préciser à quoi est égal le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}x$ de E .

5) Soit $u \in \mathrm{End(E)}$ un endomorphisme de rang 1. Démontrer qu'il existe un vecteur y de E et une forme linéaire $\ell \in \mathrm{E}^*$ tels que l'on ait $u(x) = \ell(x)\, y$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

6) Démontrer que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1, alors elle les contient tous. En déduire que l'on a alors $\mathcal{A} = \mathrm{End(E)}$.

7) Dans cette question, on suppose que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u dont le rang r est $\geqslant 2$, et on se propose de démontrer qu'il existe un endomorphisme $u' \in \mathcal{A}$, non nul, dont le rang est strictement plus petit que r.

a) Démontrer qu'il existe x et y dans E et v dans $\mathcal{A}$ tels que le couple de vecteurs $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $vu(x) = y$.

b) Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que la restriction de l'endomorphisme $uv - \lambda\,\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$ à l'image $u(\mathrm{E})$ de u ne soit ni injective ni nulle.

c) Vérifier que l'endomorphisme $u' = uvu - \lambda u$ convient.

8) Démontrer finalement que l'on $\mathcal{A} = \mathrm{End}(\mathrm{E})$.

Partie III

Soit n un entier $\geqslant 1$. On appelle *dérivation* de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ toute application linéaire d de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tous X et $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on ait

$$d(\mathrm{XY}) = d(\mathrm{X})\,\mathrm{Y} + \mathrm{X}\,d(\mathrm{Y}).$$

1) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$; démontrer que l'application d_{A} de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ définie par

$$d_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{AX} - \mathrm{XA},$$

est une dérivation.

2) Dans cette question, on se propose de démontrer que toute dérivation de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est de la forme ci-dessus.

a) Soit $d : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une dérivation. Démontrer que l'application ρ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_{2n}(\mathbf{C})$ définie par

$$\rho(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & d(\mathrm{X}) \\ 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix}$$

est un morphisme unitaire d'algèbres.

b) Démontrer qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ où A , B , C , D appartiennent à $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, telle que l'on ait, pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\mathrm{P}\,\rho(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix} \mathrm{P}.$$

c) Conclure.

Partie IV

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Tr}(\mathrm{M})$ la trace de M , somme des coefficients diagonaux de M .

1) a) Démontrer que l'application ψ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{XY}),$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

b) Démontrer que, si $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, il existe une autre base $(\mathrm{X}'_1, \ldots, \mathrm{X}'_{n^2})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n^2 , on ait

$$\psi(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}'_j) = \delta_{i,j} \qquad \text{(symbole de Kronecker).}$$

2) Démontrer que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} \mathrm{X}_i \mathrm{A} \mathrm{X}'_i = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\,\mathbf{1}_n\,.$$

Partie V

On considère dans cette partie un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ ayant la propriété suivante :

(P) *Il existe un entier* $m \geqslant 1$ *tel que l'on ait* $g^m = \mathbf{1}_n$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$.

On fixe l'entier m.

1) Démontrer que chaque élément g de G est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

2) Démontrer que l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(g),\, g \in \mathrm{G}\}$ est fini.

3) On suppose, dans cette question, que l'ensemble G, considéré comme ensemble d'endomorphismes de $\mathbf{C}^n$ (en identifiant $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{End}(\mathbf{C}^n)$), est irréductible.

a) Démontrer que l'ensemble G contient une base de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

b) Démontrer que l'ensemble G est fini (on pourra utiliser les questions (IV.1) et (V.2)).

4) Dans cette question, on ne suppose plus que l'ensemble G soit irréductible.

a) Démontrer qu'il existe des entiers p et q, avec $p + q = n$, et une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ dans laquelle chaque élément g de G s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} \mathrm{T}(g) & \mathrm{U}(g) \\ 0 & \mathrm{V}(g) \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{T}(g) \in \mathrm{M}_p(\mathbf{C})$ et $\mathrm{V}(g) \in \mathrm{M}_q(\mathbf{C})$.

b) Posons $\mathrm{G}_1 = \{g \in \mathrm{G},\, \mathrm{T}(g) = \mathbf{1}_p\}$ et $\mathrm{G}_2 = \{g \in \mathrm{G},\, \mathrm{V}(g) = \mathbf{1}_q\}$. Démontrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G.

Déterminer $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2$.

c) Soient K un groupe et H un sous-groupe de K. L'*indice* de H dans K est le cardinal de l'ensemble quotient K/H. Établir le résultat général suivant :

Soient K un groupe, K_1 et K_2 des sous-groupes distingués de K, tous deux d'indice fini dans K ; alors l'indice de $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2$ dans K est fini.

d) Conclure.

Partie VI

Soient n et m des entiers $\geqslant 1$. Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_m(\mathbf{C})$; on définit la matrice $\mathrm{A} * \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{nm}(\mathbf{C})$ par

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{B} & a_{12}\mathrm{B} & \cdots & a_{1n}\mathrm{B} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}\mathrm{B} & a_{n2}\mathrm{B} & \cdots & a_{nn}\mathrm{B} \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que l'application ϕ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{M}_m(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{M}_{nm}(\mathbf{C})$ définie par $\phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A} * \mathrm{B}$ est bilinéaire et satisfait à

$$(\mathrm{A} * \mathrm{B})\,(\mathrm{A}' * \mathrm{B}') = \mathrm{AA}' * \mathrm{BB}'$$

pour toutes matrices A, $\mathrm{A}' \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, B, $\mathrm{B}' \in \mathrm{M}_m(\mathbf{C})$.

2) Démontrer que l'image de l'application ϕ engendre l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{nm}(\mathbf{C})$.

On suppose désormais $n = m$ *.*

3) Posons

$$\mathrm{P} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{E}_{i,j} * \mathrm{E}_{j,i}.$$

a) Démontrer que l'on a $\mathrm{P}^2 = \mathbf{1}_n$.

b) Démontrer que, pour toutes matrices A , $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A} * \mathrm{B})\,\mathrm{P} = \mathrm{B} * \mathrm{A}.$$

4) Soient A et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Calculer la trace et le déterminant de la matrice $\mathrm{A} * \mathrm{B}$. b) Déterminer les valeurs propres de $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ en fonction de celles de A et de B .

4.1.2 Solution de la première épreuve écrite

Partie I

1) (i) $\Rightarrow$ (ii) : comme les p_i sont des projecteurs, on a bien ${p_i}^2 = p_i$. Pour $j \neq i$, p_i s'annule sur W_j , donc $p_ip_j = 0$. Soit $x \in \mathrm{W}$ et soit $x = x_1 + \cdots + x_n$ sa décomposition sur la somme directe des W_i . On a $p_i(x_i) = x_i$ et $p_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$, d'où $p_i(x) = x_i$ et $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : comme ${p_i}^2 = p_i$, les p_i sont des projecteurs dont les images respectives sont les W_i . Pour $j \neq i$, on a $p_ip_j = 0$, donc p_i s'annule sur W_j . Soit $x \in \mathrm{W}$; démontrons que x s'écrit de façon unique $x = x_1 + \cdots + x_n$ où $x_i \in \mathrm{W}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Comme $p_1 + \cdots + p_n = \mathbf{1}_{\mathrm{W}}$, on a

(1) $$x = p_1(x) + \cdots + p_n(x) \quad \text{où } p_i(x) \in \mathrm{W}_i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Supposons que l'on ait

$$x = y_1 + \cdots + y_n \quad \text{où } y_i \in \mathrm{W}_i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Comme $y_j \in \mathrm{W}_j$, on a $p_i(y_i) = y_i$ et $p_i(y_j) = 0$ pour $j \neq i$, d'où $p_i(x) = y_i$ et l'unicité de l'écriture (1) .

2) a) Les unités matricielles satisfont aux relations

(2) $$\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{E}_{j,j} = \delta_{i,j}, \quad \mathrm{E}_{1,1} + \cdots + \mathrm{E}_{n,n} = \mathbf{1}_n\,.$$

Le morphisme ρ transforme ces égalités en

$$p_ip_j = \delta_{i,j}, \quad p_1 + \cdots + p_n = \mathbf{1}_{\mathrm{W}}\,.$$

2) b) Plus généralement, on a les relations

(3) $$\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{j,k} = \mathrm{E}_{i,k}, \quad \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = 0 \text{ si } j \neq k.$$

On en déduit

(4) $$\rho(\mathrm{E}_{i,i})\rho(\mathrm{E}_{i,j}) = \rho(\mathrm{E}_{i,j}), \qquad \rho(\mathrm{E}_{i,j})\rho(\mathrm{E}_{j,i}) = p_i, \qquad \rho(\mathrm{E}_{j,i})\rho(\mathrm{E}_{i,j}) = p_j.$$

La première égalité prouve que l'image de $\rho(\mathrm{E}_{i,j})$ est contenue dans W_i. Les deux dernières prouvent que $\rho(\mathrm{E}_{i,j})$ et $\rho(\mathrm{E}_{j,i})$ induisent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre W_j et W_i.

2) c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres complexes tels que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Appliquant $\rho(\mathrm{E}_{1,j})$ à cette somme, en tenant compte des relations (4), on obtient $\lambda_j w_1 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$.

Toujours d'après ces relations, on a $\rho(\mathrm{E}_{s,t})v_k = \rho(\mathrm{E}_{s,t})\rho(\mathrm{E}_{k,1})w_1 = \delta_{t,k}\,\rho(\mathrm{E}_{s,1})w_1 = \delta_{t,k}\,v_s$.

2) d) Pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, posons

$$v_{j,k} = \rho(\mathrm{E}_{k,1})w_j.$$

D'après la question (I.2.b), la famille $(v_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de l'espace vectoriel W_k. On a vu en (I.2.a) que l'espace vectoriel W est somme directe de la famille des sous-espaces vectoriels W_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Par suite la famille des nr vecteurs $v_{j,k}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant n$ est une base de l'espace vectoriel W.

On a vu en (I.2.c) que la famille $(v_{1,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base du sous-espace vectoriel V_1. La même démonstration prouve que la famille $(v_{j,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base du sous-espace vectoriel V_j, pour $j = 1, \ldots, r$. On en déduit que l'espace vectoriel W est somme directe des V_j, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Les deux décompositions $\bigoplus \mathrm{W}_k$ et $\bigoplus \mathrm{V}_j$ correspondent à deux partitions de la base $(v_{j,k})$.

2) e) Choisissons une base $(w_1, \ldots, w_r)$ du sous-espace vectoriel W_1, considérons la base $(v_{j,k})$ définie dans la question précédente. D'après la question (I.2.c), le sous-espace V_1 est stable par les endomorphismes $\rho(\mathrm{E}_{s,t})$, pour tous s et t, donc par $\rho(\mathrm{M})$ pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, et la matrice, sur la base (v_k), de l'endomorphisme de V_1 déduit de $\rho(\mathrm{E}_{s,t})$ est précisément la matrice $\mathrm{E}_{s,t}$. Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice sur cette base, de l'endomorphisme de V_1 déduit de $\rho(\mathrm{M})$, est donc aussi la matrice M. La même démonstration vaut pour tous les sous-espaces V_j. Le résultat demandé en résulte.

Partie II

1) Soient $x \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. On suppose $u(x) = \lambda x$. Comme u et v commutent, on a alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Ceci démontre que, si x appartient au sous-espace propre de u pour la valeur propre λ, il en est de même de $v(x)$. Les sous-espaces propres de u sont stables par v.

2) Si $\mathrm{E} = \{0\}$, il n'y a rien à démontrer. On suppose $\mathrm{E} \neq \{0\}$. Soit u un endomorphisme de E. Comme le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, l'endomorphisme u possède un vecteur propre $\neq 0$ et un sous-espace propre $\mathrm{F} \neq \{0\}$ pour une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Si u commute à tout endomorphisme $v \in \mathrm{X}$, le sous-espace F est stable par tout endomorphisme $v \in \mathrm{X}$ d'après la question (II.1). Comme l'ensemble X irréductible et $\mathrm{F} \neq \{0\}$, on a $\mathrm{F} = \mathrm{E}$, et l'endomorphisme u est l'homothétie de rapport λ.

3) Pour $u,\ v \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, on a ${}^t u + {}^t v = {}^t(u+v)$, $\lambda({}^t u) = {}^t(\lambda u)$, $({}^t u)({}^t v) = {}^t(vu)$, et enfin ${}^t\,\mathbf{1}_{\mathrm{E}} = \mathbf{1}_{\mathrm{E}^*}$. Il en résulte que ${}^t\mathcal{A}$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathrm{End}(\mathrm{E}^*)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E^* stable par tout élément de ${}^t\mathcal{A}$. Notons $\mathrm{F}^\perp$ l'orthogonal de F (c'est l'ensemble des vecteurs de E annulés par tous les éléments de F). L'ensemble $\mathrm{F}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E (intersection de noyaux), et il est stable par $\mathcal{A}$: en effet, soit $x \in \mathrm{F}^\perp$ et soit $u \in \mathcal{A}$; pour tout $\varphi \in \mathrm{F}$, on a

$$\varphi(u(x)) = {}^t u(\varphi)(x) = 0 \quad \text{car} \quad {}^t u(\varphi) \in \mathrm{F};$$

donc $u(x)$ appartient à $\mathrm{F}^\perp$.

Par hypothèse, l'algèbre $\mathcal{A}$ est irréductible, donc $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$ ou E, et $\mathrm{F} = \mathrm{E}^*$ ou $\{0\}$. Il en résulte que l'algèbre ${}^t\mathcal{A}$ est irréductible.

4) L'ensemble $\mathcal{A}x$ est un sous-espace vectoriel de E du fait que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End(E)}$. L'ensemble $\mathcal{A}x$ est stable par $\mathcal{A}$ du fait que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Il n'est pas égal à $\{0\}$ car $x \neq 0$ et $\mathbf{1}_\mathrm{E} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est irréductible, $\mathcal{A}x$ est égal à E.

5) Soit $u \in \mathrm{End(E)}$ un endomorphisme de rang 1. L'image de u est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Soit y un vecteur non nul de cette image ; le vecteur y constitue à lui seul une base de $\mathrm{Im}(u)$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a donc $u(x) = \ell(x)y$, où $\ell(x) \in \mathbf{C}$. Il reste à voir que l'application ℓ de E dans $\mathbf{C}$ ainsi définie est linéaire, ce qui est immédiat.

6) Soit u un endomorphisme de rang 1 appartenant à $\mathcal{A}$ et défini, d'après la question (II.5), par $u(x) = \ell(x)y$, où $y \in \mathrm{E}$, $y \neq 0$ et $\ell \in \mathrm{E}^*$. Soit z un vecteur quelconque de E. Comme $y \neq 0$, il existe, d'après (II.4), un endomorphisme $a \in \mathcal{A}$ tel que $z = a(y)$. Soit $k \in \mathrm{E}^*$ une forme linéaire ; réutilisant (II.4) pour la sous-algèbre irréductible ${}^t\mathcal{A}$, on déduit qu'il existe $b \in \mathcal{A}$ tel que $k = \ell b$. On a alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $aub(x) = k(x)z$. Comme aub appartient à $\mathcal{A}$, compte tenu de (II.5), on a bien démontré que tous les endomorphismes de rang 1 appartiennent à $\mathcal{A}$.

7) a) Comme le rang de u est au moins 2, il existe x et y dans E tels que le couple $(u(x), u(y))$ soit libre. En particulier $u(x) \neq 0$ et il existe, d'après (II.4) un élément v de $\mathcal{A}$ tel que $v(u(x)) = y$.

7) b) L'image de u est stable par uv et n'est pas réduite à $\{0\}$. Comme le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par uv possède une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Ce qui signifie que la restriction de $uv - \lambda\mathbf{1}_\mathrm{E}$ à $\mathrm{Im}(u)$ n'est pas injective. Elle n'est pas nulle car sa valeur sur $u(x)$ est $uvu(x) - \lambda u(x) = u(y) - \lambda u(x)$, qui est $\neq 0$ puisque le couple $(u(x), u(y))$ est libre.

7) c) L'endomorphisme u' n'est pas nul d'après (II.7.b). Le rang de u' est le rang de la restriction de $uv - \lambda\mathbf{1}_\mathrm{E}$ à l'image de u. Comme cette restriction n'est pas injective, son rang est strictement plus petit que la dimension de l'image de u, qui est le rang de u.

8) Si $\mathrm{E} = \{0\}$, il n'y a rien à démontrer. Sinon l'algèbre $\mathcal{A}$ contient $\mathbf{1}_\mathrm{E}$ et contient donc des endomorphismes de rang $\geqslant 1$. D'après (II.7), l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1. En effet, le minimum des rangs des éléments $\neq 0$ de $\mathcal{A}$ ne peut être $\geqslant 2$. D'après (II.6), on a alors $\mathcal{A} = \mathrm{End(E)}$.

Partie III

1) L'application d_A est clairement $\mathbf{C}$-linéaire. Soient X et Y dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$; on a

$$d_\mathrm{A}(\mathrm{XY}) = \mathrm{AXY} - \mathrm{XYA} = (\mathrm{AX} - \mathrm{XA})\mathrm{Y} + \mathrm{X}(\mathrm{AY} - \mathrm{YA}) = d_\mathrm{A}(\mathrm{X})\mathrm{Y} + \mathrm{X}d_\mathrm{A}(\mathrm{Y}).$$

2) a) On a

$$\rho(\mathrm{X})\rho(\mathrm{Y}) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & d(\mathrm{X}) \\ 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Y} & d(\mathrm{Y}) \\ 0 & \mathrm{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{XY} & \mathrm{X}d(\mathrm{Y}) + d(\mathrm{X})\mathrm{Y} \\ 0 & \mathrm{XY} \end{pmatrix} = \rho(\mathrm{XY})$$

On a $d(\mathbf{1}_n) = 0$ car $d(\mathbf{1}_n) = d({\mathbf{1}_n}^2) = d(\mathbf{1}_n)\,\mathbf{1}_n + \mathbf{1}_n\,d(\mathbf{1}_n) = 2d(\mathbf{1}_n)$. D'où

$$\rho(\mathbf{1}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{2n}.$$

2) b) D'après (I.2.e), il y a une base de $\mathbf{C}^{2n}$ dans laquelle, pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice $\rho(\mathrm{X})$ est diagonale par blocs. Si P est la matrice de changement de base, elle donne le résultat.

2) c) Pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on obtient en développant

$$(1) \quad \begin{cases} \mathrm{AX} &= \mathrm{XA} \\ \mathrm{CX} &= \mathrm{XC} \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} \mathrm{A}d(\mathrm{X}) + \mathrm{BX} &= \mathrm{XB} \\ \mathrm{C}d(\mathrm{X}) + \mathrm{DX} &= \mathrm{XD} \end{cases}$$

Les relations (1), pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, prouvent que les matrices A et C sont scalaires d'après (II.2) : $\mathrm{A} = \alpha\mathbf{1}_n$, $\mathrm{C} = \gamma\mathbf{1}_n$. Les nombres complexes α et γ ne sont pas tous deux nuls puisque la matrice P est inversible. Si par exemple $\alpha \neq 0$, la première relation (2) entraine $d(\mathrm{X}) = \frac{1}{\alpha}(\mathrm{XB} - \mathrm{BX})$ d'où le résultat.

Partie IV

1) a) Soit $X = (x_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbf{C})$. Par définition

$$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_{i,i}\,.$$

L'application $(X, Y) \mapsto XY$ de $M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C})$ dans $M_n(\mathbf{C})$ est bilinéaire. L'application $X \mapsto \mathrm{Tr}(X)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbf{C})$. L'application composée ψ est une forme bilinéaire.

Soient $X = (x_{i,j})$ et $Y = (y_{i,j})$ deux matrices de $M_n(\mathbf{C})$. Posons $Z = XY$ et $Z = (z_{i,j})$. On a

$$z_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_{i,k} y_{k,j}, \qquad \mathrm{Tr}(Z) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} z_{i,i} = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} x_{i,k}\, y_{k,i}.$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$; l'application ψ est une forme bilinéaire symétrique.

L'application Ψ de $M_n(\mathbf{C})$ dans $M_n(\mathbf{C})^*$ qui, à $X \in M_n(\mathbf{C})$ associe la forme linéaire $Y \mapsto \mathrm{Tr}(XY)$, est linéaire. Remarquons que l'on a $\mathrm{Tr}(E_{i,j}Y) = y_{j,i}$. L'image de Ψ contient donc toutes les formes linéaires coordonnées sur la base $(E_{i,j})$ de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{C})$. Par suite Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui signifie que la forme linéaire ψ est non dégénérée.

1)b) Si $(X_1, \ldots, X_{n^2})$ est une base quelconque de $M_n(\mathbf{C})$, les formes linéaires $\Psi(X_i)$ forment une base de $M_n(\mathbf{C})^*$, et la base duale $(X'_1, \ldots, X'_{n^2})$ donne le résultat.

2) Nous allons d'abord démontrer que la matrice $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i A X'_i$ est une matrice scalaire, puis calculer ce scalaire en calculant la trace de cette matrice. Pour démontrer que c'est une matrice scalaire, d'après (II.2), il suffit de démontrer qu'elle commute à toutes les matrices.

Pour toute matrice $Y \in M_n(\mathbf{C})$, d'après (IV.1.b), on a

$$Y = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} \mathrm{Tr}(X_i Y) X'_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} \mathrm{Tr}(Y X'_i) X_i\,. \tag{5}$$

Soit $Y \in M_n(\mathbf{C})$; en appliquant (5) aux matrices $X'_i Y$ puis YX_j, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i A X'_i Y &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n^2} X_i A\, \mathrm{Tr}(X'_i Y X_j) X'_j \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n^2} \mathrm{Tr}(X'_i Y X_j) X_i A X'_j \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n^2} Y X_j A X'_j\end{aligned}$$

Ainsi la matrice $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i A X'_i$ est scalaire. Posons $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i A X'_i = \lambda(A)\, \mathbf{1}_n$, et calculons d'abord $\lambda(\mathbf{1}_n)$. On a $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i X'_i = \lambda(\mathbf{1}_n)\, \mathbf{1}_n$. En prenant la trace et en utilisant $\mathrm{Tr}(X_i X'_i) = 1$, on obtient $n^2 = \lambda(\mathbf{1}_n)\, n$, soit $\lambda(\mathbf{1}_n) = n$.

Pour la matrice scalaire A, on a $\mathrm{Tr}(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i A X'_i) = n\lambda(A)$, et

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i A X'_i) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} \mathrm{Tr}(X_i A X'_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} \mathrm{Tr}(A X_i X'_i) \\ &= \mathrm{Tr}(A \sum_{1 \leqslant i \leqslant n^2} X_i X'_i) = n\, \mathrm{Tr}(A)\end{aligned}$$

d'où $\lambda(A) = \mathrm{Tr}(A)$.

Partie V

1) Le polynôme $X^m - 1$ a pour racines dans $\mathbf{C}$ les racines m-ièmes de l'unité ; ce sont des racines simples. Ce polynôme annule tous les éléments de G, donc tout élément de G est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines m-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.

2) D'après la question précédente, la trace d'un élément g de G est une somme $\xi_1 + \cdots + \xi_n$, de racines m-ièmes de l'unité. Comme il y a m racines m-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$, cette somme peut prendre au plus m^n valeurs.

3) a) L'espace vectoriel engendré par G dans $\mathrm{End}(\mathbf{C}^n)$ est une algèbre unitaire d'endomorphismes, irréductible puisque G est irréductible. D'après (II.8), cette algèbre est égale à $\mathrm{End}(\mathbf{C}^n)$. Ainsi, l'ensemble G est générateur de l'espace vectoriel $\mathrm{End}(\mathbf{C}^n)$; il contient donc une base de cet espace vectoriel.

3) b) Soit $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n^2})$ une base de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ constituée d'éléments de G, et soit $(\mathrm{X}'_1, \ldots, \mathrm{X}'_{n^2})$ la base associée comme dans la question (IV.2). Tout élément g de G peut s'écrire

$$g = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n^2} \gamma_j \mathrm{X}'_j \quad \text{où} \quad \gamma_j \in \mathbf{C}.$$

On a alors, d'après (IV.2),

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{X}_i g) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n^2} \gamma_j \,\mathrm{Tr}(\mathrm{X}_i \mathrm{X}'_j) = \gamma_i\,.$$

Comme les X_i appartiennent à G, d'après (V.2), $\mathrm{Tr}(\mathrm{X}_i g)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Par suite les γ_i aussi, et g aussi. Donc le groupe G est fini.

4) a) Si G est irréductible, c'est immédiat en prenant $p = n$, $q = 0$. Si G n'est pas irréductible, il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{C}^n$, de dimension p avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$, qui est stable par tous les élements de G. Prenons un supplémentaire quelconque F' de F et des bases de F et de F' ; la matrice de chaque élément de G dans la juxtaposition des deux bases a la forme voulue.

4) b) Écrivons le produit

$$\begin{pmatrix} \mathrm{T}(g) & \mathrm{U}(g) \\ 0 & \mathrm{V}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{T}(g') & \mathrm{U}(g') \\ 0 & \mathrm{V}(g') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}(g)\mathrm{T}(g') & \mathrm{T}(g)\mathrm{U}(g') + \mathrm{U}(g)\mathrm{V}(g') \\ 0 & \mathrm{V}(g)\mathrm{V}(g') \end{pmatrix}$$

Comme G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, on en déduit que $\mathrm{T}(g)$ appartient à $\mathrm{GL}(p, \mathbf{C})$ et $\mathrm{V}(g)$ à $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$, et que les applications T et V sont des morphismes du groupe G dans les groupes $\mathrm{GL}(p, \mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}(q, \mathbf{C})$. Les sous-groupes G_1 et G_2 en sont les noyaux. Ce sont donc des sous-groupes distingués de G.

Soit $g \in \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2$; on a

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & \mathrm{U}(g) \\ 0 & \mathbf{1}_q \end{pmatrix}, \qquad g^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & 2\,\mathrm{U}(g) \\ 0 & \mathbf{1}_q \end{pmatrix}, \qquad g^m = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & m\,\mathrm{U}(g) \\ 0 & \mathbf{1}_q \end{pmatrix}.$$

Comme $g^m = \mathbf{1}_n$, on en déduit $\mathrm{U}(g) = 0$ et $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2 = \{\mathbf{1}_n\}$.

4) c) Le groupe $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2$ est un sous-groupe distingué de K, *a fortiori* de K_1 et de K_2. En comptant les classes, on obtient

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{K}/(\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{K}/\mathrm{K}_1)\ \mathrm{Card}\,(\mathrm{K}_1/(\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2)).$$

Par ailleurs, le groupe $\mathrm{K}_1/(\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2)$ est isomorphe à un sous-groupe de K/K_2. On en déduit

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{K}/(\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2)) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{K}/\mathrm{K}_1)\,\mathrm{Card}\,(\mathrm{K}/\mathrm{K}_2),$$

d'où le résultat demandé.

4) d) On conclut qu'un sous-groupe G de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ ayant la propriété indiquée (tout $g \in \mathrm{G}$ satisfait à $g^m = \mathbf{1}_n$) est un groupe fini. Cela se démontre par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$. Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas général, si le groupe G est irréductible, il est fini d'après (V.3). Si G n'est pas irréductible, il possède, d'après (V.4.b), deux sous-groupes distingués G_1 et G_2, dont l'intersection est l'élément neutre $\{\mathbf{1}_n\}$. Le groupe G/G_1 est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(p, \mathbf{C})$, satisfaisant bien sûr à la propriété $g^m = \mathbf{1}_p$. Par hypothèse de récurrence, G/G_1 est un groupe fini. Il en est de même de G/G_2. Les groupes G_1 et G_2 ont un indice fini dans G et $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2 = \{\mathbf{1}_n\}$. D'après (V.4.c), le groupe G est fini, et la démonstration par récurrence aussi.

Partie VI

1) Par définition, on a

$$\mathrm{E}_{i,j} * \mathrm{E}_{k,\ell} = \mathrm{E}_{mi+k,mj+\ell}\,, \tag{6}$$

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \sum_{i,j,k,\ell} a_{i,j} b_{k,\ell} \mathrm{E}_{mi+k,mj+\ell}\,. \tag{7}$$

Ceci démontre que l'application Φ est $\mathbf{C}$-bilinéaire.

La relation $(\mathrm{A} * \mathrm{B})(\mathrm{A}' * \mathrm{B}') = \mathrm{AA}' * \mathrm{BB}'$ résulte d'un calcul de produit de matrices par blocs.

2) La relation (7) démontre que l'image de Φ contient la base $(\mathrm{E}_{p,q})$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{mn}(\mathbf{C})$.

3) a) Rappelons la table de multiplication des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$:

$$\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{j,k} = \mathrm{E}_{i,k}, \quad \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = 0 \text{ si } j \neq k. \tag{3}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^2 &= (\sum_{i,j} \mathrm{E}_{i,j} * \mathrm{E}_{j,i})(\sum_{k,\ell} \mathrm{E}_{k,\ell} * \mathrm{E}_{\ell,k})\,, \\
&= \sum_{i,j,k,\ell} (\mathrm{E}_{i,j} * \mathrm{E}_{k,\ell})(\mathrm{E}_{j,i} * \mathrm{E}_{\ell,k}) && \text{d'après (VI.1),} \\
&= \sum_{i,j} \mathrm{E}_{i,i} * \mathrm{E}_{j,j} && \text{d'après (3),} \\
&= \sum_{i,j} \mathrm{E}_{ni+j,ni+j} && \text{d'après (6),} \\
&= \mathbf{1}_{n^2}\ .
\end{aligned}$$

3) b) Comme $\mathrm{P}^2 = \mathbf{1}_{n^2}$, il revient au même de démontrer $\mathrm{P}(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = (\mathrm{B} * \mathrm{A})\mathrm{P}$. En raison des bilinéarités, il suffit de vérifier cette relation avec $\mathrm{A} = \mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{E}_{k,\ell}$. Calculons

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}) &= (\sum_{s,t} \mathrm{E}_{s,t} * \mathrm{E}_{t,s})(\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}), \\
&= \sum_{s,t} (\mathrm{E}_{s,t}\mathrm{E}_{i,j} * \mathrm{E}_{t,s}\mathrm{E}_{k,\ell}) && \text{d'après (VI.1),} \\
&= \mathrm{E}_{k,j} * \mathrm{E}_{i,\ell} && \text{d'après (3)).}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}_{k,\ell}\mathrm{E}_{i,j})\mathrm{P} &= (\mathrm{E}_{k,\ell}\mathrm{E}_{i,j})(\sum_{s,t} \mathrm{E}_{s,t} * \mathrm{E}_{t,s}), \\
&= \sum_{s,t} (\mathrm{E}_{k,\ell}\mathrm{E}_{s,t} * \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{t,s}) && \text{d'après (VI.1),} \\
&= \mathrm{E}_{k,j} * \mathrm{E}_{i,\ell} && \text{d'après (3),}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4) a) En regardant les éléments diagonaux de la matrice $\mathrm{A} * \mathrm{B}$, on voit

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \sum_i a_{i,i} \,\mathrm{Tr}(\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}(\mathrm{B}).$$

Par ailleurs, on remarque l'égalité $\mathrm{A} * \mathrm{B} = (\mathrm{A} * \mathbf{1}_n)(\mathbf{1}_n * \mathrm{B})$. La matrice $(\mathbf{1}_n * \mathrm{B})$ est diagonale par blocs égaux à B ; son déterminant est $\det(\mathrm{B})^n$. La matrice $(\mathrm{A} * \mathbf{1}_n)$ est semblable à la matrice $(\mathbf{1}_n * \mathrm{A})$ d'après (VI.3) ; son déterminant est donc $\det(\mathrm{A})^n$. Finalement $\det(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})^n \det(\mathrm{B})^n$.

4) b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de la matrice A et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ celles de la matrice B. Comme le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, il existe une matrice inversible Q telle que la matrice QAQ^{-1} soit triangulaire supérieure, avec les λ_i sur sa diagonale, et une matrice inversible R telle que la matrice

RBR^{-1} soit triangulaire supérieure, avec les μ_i sur sa diagonale. Choisissons de telles matrices Q et R. Alors la matrice $\mathrm{QAQ}^{-1} * \mathrm{RBR}^{-1}$ est triangulaire supérieure par blocs, avec les $\lambda_i \mathrm{RBR}^{-1}$ comme blocs diagonaux. Chacun de ces blocs est lui-même triangulaire supérieur avec les $\lambda_i\mu_j$ sur la diagonale. Ainsi la matrice $(\mathrm{QAQ}^{-1}) * (\mathrm{RBR}^{-1})$ est triangulaire supérieure avec les produits $\lambda_i\mu_j$ sur la diagonale. Ces n^2 produits sont donc ses valeurs propres.

La matrice $\mathrm{Q} * \mathrm{R}$ est inversible et son inverse est $\mathrm{Q}^{-1} * \mathrm{R}^{-1}$ d'après (VI.1). La matrice $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ est donc conjuguée à la matrice $(\mathrm{QAQ}^{-1}) * (\mathrm{RBR}^{-1})$ et a donc les mêmes valeurs propres.

4.1.3 Commentaires sur la première épreuve écrite

Cette première épreuve portait sur l'algèbre linéaire et matricielle. Elle a été discriminante, plus ou moins bien réussie selon les candidats ; il en est d'ailleurs de même de la seconde épreuve. Nous nous contenterons d'un commentaire général sur la rédaction des copies et d'un inventaire des erreurs les plus fréquentes. Il ne s'agit pas de critiquer les candidats qui ont résolu peu de questions, ou qui ont fait des erreurs, mais de leur donner des conseils en vue d'améliorer leurs résultats.

Rédaction

Certaines copies sont très bien rédigées, mais les correcteurs constatent une augmentation du nombre des copies dont la rédaction laisse à désirer. De la part de professeurs en exercice, confrontés aux copies d'élèves et à l'apprentissage de la rédaction, ils s'attendent à plus de maturation, même dans les copies peu remplies. De fait, la majorité des copies allie un soin très relatif et une argumentation insuffisante. Voici un exemple pour la question de l'argumentation : (II.1). *Soient u et v deux éléments de* End(E) *qui commutent entre eux. Démontrer que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.* C'est une question simple. l'hypothèse principale est « u et v commutent ». On attend d'une copie bien rédigée qu'elle pointe l'endroit précis de la solution où intervient cette hypothèse. De même, l'existence de vecteurs propres $\neq 0$ vient du fait que le corps des scalaires est le corps des nombres complexes, qui est algébriquement clos ; cela mérite d'être mentionné chaque fois que l'on s'en sert. Pour le soin de l'écriture, penser que la copie est destinée à être lue par des correcteurs.

La deuxième partie montre que la dualité n'est pas vraiment dominée par une majorité de candidats. Dans certaines copies, le passage au dual est vécu comme l'adjonction automatique d'une étoile aux notations, sans que cela garde un sens. Dans ces copies, on utilise bien sûr la notation E^* pour désigner le dual algébrique de l'espace vectoriel E, puis, si F est un sous-espace vectoriel de E, on lui attribue immédiatement un espace F^* qui est considéré comme un sous-espace de E. De même, au vecteur e, on fait correspondre un vecteur e^*. de E^*...

Erreurs ou oublis fréquente

(I.1) : Définition d'une somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels (souvent les seules intersections deux à deux sont envisagées).

Confusion entre sous-espace globalement invariant, et sous-espcae de points fixes.

(I.2.b) : Confusion entre restriction et application induite, entre image et espace d'arrivée. Il n'y a pas unicité « du » supplémentaire. Confusion entre supplémentaire et complémentaire, entre union et somme.

(I.2.c) : Famille libre n'équivaut pas à chaque couple de vecteurs est libre.

(II.2) : Justifier l'existence d'une valeur propre : $\mathrm{E} \neq \{0\}$ et $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

(II.5) : Oubli de la linéarité de ℓ.

(III.1) : Oubli de la linéarité de d_{A} .

(III.2.b) : Toute matrice carrée extraite d'une matrice carrée inversible n'est pas nécessairement inversible.

(IV.1.a) : Difficultés sur la caractérisation d'une forme bilinéaire non dégénérée.

(V.1) : Diverses erreurs sur la diagonalisation et la triangulation : sur le corps $\mathbf{C}$, toute matrice n'est pas diagonalisable, toute matrice inversible n'est pas diagonalisable, une matrice diagonalisable n'a pas toujours toutes ses valeurs propres simples.

(V.4.b) : Difficultés avec les noyaux de morphismes de groupes.

(VI.2) : L'image d'une application bilinéaire n'est pas souvent un sous-espace vectoriel de l'espace but.

(VI.3.a) : Il fallait lire $\mathrm{P}^2 = \mathbf{1}_{n^2}$ au lieu de $\mathbf{1}_n$.

4.2 Deuxième épreuve écrite

4.2.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

Introduction et notations

Dans ce problème, on note $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels.

On dit qu'un endomorphisme T d'un espace vectoriel est *nilpotent* s'il existe un nombre entier $s \geqslant 0$ tel que $\mathrm{T}^s = 0$.

Si f est une fonction de classe C^∞ de la variable réelle x et n un entier $\geqslant 0$, on note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée n-ième de la fonction f.

Si g est une fonction de classe C^∞ de la variable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ définie dans une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, on note $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de g par rapport à la variable x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour des entiers p et n tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on définit les coefficients binomiaux par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} \quad \text{pour} \quad 0 < p < n, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

L'un des objets de ce problème est la démonstration et l'application de la *formule de réversion de Lagrange* qui permet de calculer, dans certains cas, la dérivée n-ième d'une fonction réciproque.

On étudie d'abord la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont le terme général est l'unique solution $\geqslant 0$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Dans un premier temps, on établit directement une expression explicite de u_n comme somme d'une série convergente (parties **I** et **II**).

On établit ensuite la formule de réversion de Lagrange (partie **III**).

On applique enfin cette formule pour obtenir une autre démonstration de l'expression de u_n (partie **IV**).

On rappelle les résultats suivants qui pourront être utilisés sans démonstration :

A) Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, on a l'équivalence (*formule de Stirling*) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,.$$

B) Pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1 et, pour $-1 < x < 1$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

C) Le *théorème des fonctions implicites* pour une fonction F de classe C^∞, définie sur $\mathbf{R}^3$, peut s'énoncer ainsi :

On suppose qu'en un point (x_0, y_0, z_0) de $\mathbf{R}^3$, on a

$$\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$, un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbf{R}$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ caractérisée par la condition

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U},\ \forall z \in \mathrm{V}, \quad (\mathrm{F}(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow z = \varphi(x,y)).$$

La fonction φ est de classe C^∞ sur U et pour tout point (a,b) de U, on a

$$\mathrm{F}(a, b, \varphi(a,b)) = 0\,,$$

ainsi que les relations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = -\,\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = -\,\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,.$$

On dit que la fonction φ est *définie implicitement* sur U par la relation $\mathrm{F}(x,y,z)=0$.

D) Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ une suite double de nombres réels. Si la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\Big)$ est finie, alors les trois expressions

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,, \quad \sum_{q=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+k=q}a_{n,k}\Big)\,,$$

ont un sens et sont égales. Leur valeur commune est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$.

E) Soit R un nombre réel >0. Si les fonctions f et g sont sommes de séries entières convergentes dans l'intervalle $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, leur somme $f+g$ et leur produit fg sont aussi sommes de séries entières convergentes dans le même intervalle.

I . La suite (u_n)

1) Démontrer, pour tout entier $n\geqslant 1$, l'existence d'une unique solution réelle $\geqslant 0$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Cette solution est notée u_n. Démontrer que l'on a $0\leqslant u_n\leqslant 1$.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

3) Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a

$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$

4) a) Calculer u_2.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

5) Pour $n\geqslant 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \dfrac{1}{2}$. Démontrer que $n\,\varepsilon_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

6) En déduire, à l'aide de la question (I.3), le développement asymptotique suivant de u_n, pour n tendant vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,.\,2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

7) a) Déterminer le plus petit entier $s\geqslant 1$ pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} < 10^{-2}.$$

Pour cela, on pourra déterminer, avec une calculatrice, le signe de $f_n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{100}\right)$ pour $n=2,\,3,\ldots,$ où f_n est la fonction définie par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

b) Écrire en français une procédure qui, pour un entier $p\geqslant 1$ donné, permet de déterminer le plus petit entier s pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} \leqslant 10^{-p}.$$

On pourra utiliser les fonctions g_n définies par

$$g_n(x) = (x-1)\,f_n(x).$$

8) On se propose de démontrer l'inégalité suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

(1) $$u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

a) En utilisant la fonction g_n définie dans la question (I.7), démontrer que l'inégalité (1) est équivalente à l'inégalité suivante :

(2) $$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

b) Pour $x > 0$, on pose

$$\psi(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) - (x+1)\ln(2).$$

Étudier la variation de la fonction ψ et en déduire l'inégalité (2).

9) a) Démontrer l'inégalité $\frac{1}{2} < u_4 < \frac{6}{11}$.

b) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 4$, l'inégalité

$$\frac{u_n}{2(1-u_n)} < \frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{n+1}.$$

II . Expression de u_n comme somme d'une série

Dans cette partie, on se propose d'établir, lorsque l'entier p est assez grand, l'expression suivante de u_p comme somme d'une série convergente :

(T_p) $$u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

1) Soit p un entier $\geqslant 1$. On note S_p la série entière définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n} \binom{n(p+1)}{n-1} x^n.$$

a) Démontrer que le rayon de convergence ρ_p de la série entière S_p est donné par

$$\rho_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

b) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, la série du second membre de la relation (T_p) est convergente. [On utilisera la question (I.8).]

2) a) Démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{(n+1)\,2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n}.$$

b) En déduire la relation (T_1).

3) On a admis dans les Préliminaires que, pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1, et que, pour $x \in]-1,1[$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

En déduire, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ et $x \in]-1,1[$, l'égalité

$$\frac{x^n}{(1+x)^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} x^{n+k}.$$

4) Pour $p \geqslant 1$, on pose

$$v_p = 2u_p - 1.$$

a) Démontrer que l'on a
$$\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

b) Déduire de ce qui précède que l'on a, pour $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, l'égalité
$$\frac{1}{2^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k}.$$

5) **Dans toute la fin de cette deuxième partie, on fixe l'entier $p \geqslant 4$, et on pose**
$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2n} \binom{n(p+1)+k-1}{k} \binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{n+k}.$$

a) Démontrer la relation

$$(\mathrm{U}_p) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \right).$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la série $\sum_{k \geqslant 0} |a_{n,k}|$ est convergente et déterminer sa somme.

c) En utilisant les questions (I.9) et (II.1), démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| \right)$ est convergente.

6) Soient q un entier $\geqslant 2$ et $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est $\leqslant q-1$. On note Δ_q l'application qui, à un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ de degré $\leqslant q-1$, associe le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

a) Démontrer que Δ_q est un endomorphisme nilpotent de $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$.

b) En déduire que, si P est un polynôme de degré $\leqslant q-1$, on a
$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} \mathrm{P}(\mathrm{X}+j) = 0.$$

7) a) Soit toujours q un entier $\geqslant 2$. En utilisant la question précédente, démontrer que la somme $\sum a_{n,k}$ étendue aux indices (n,k) tels que $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ et $n+k = q+1$, est nulle.

b) En déduire la relation (T_p) pour $p \geqslant 4$.

8) On fixe toujours l'entier $p \geqslant 4$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$\lambda_n = \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

a) Démontrer l'existence d'un nombre réel μ_p appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que l'on ait
$$\lambda_{n+1} \sim \mu_p \lambda_n \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

b) Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ est convergente et que son reste
$$\mathrm{R}_p(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^{k(p+1)+1}} \binom{k(p+1)}{k-1}$$
satisfait à l'équivalence $\mathrm{R}_p(n) \sim \dfrac{\mu_p}{1-\mu_p} \lambda_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III . Réversion de Lagrange

Dans cette partie f et Φ désignent deux fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Pour x, t et $y \in \mathbf{R}$, on pose
$$\mathrm{F}(x,t,y) = t - y + x\,\Phi(y).$$

1) a) En utilisant les rappels du Préliminaire, démontrer qu'il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, telle que $\varphi(0,0) = 0$, et $\mathrm{F}(x,t,\varphi(x,t)) = 0$ pour $(x,t) \in \mathrm{U}$.

b) Démontrer que l'on a dans U l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\Phi \circ \varphi)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot$$

2) On définit la fonction u dans U par $u = f \circ \varphi$.

a) Vérifier que la fonction u est de classe C^∞ et satisfait à l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\Phi \circ \varphi)\, \frac{\partial u}{\partial t}\cdot$$

b) Plus généralement, démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, que l'on a

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big((\Phi \circ \varphi)^n\, \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\cdot$$

c) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour $(0,t) \in \mathrm{U}$, l'égalité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = \frac{d^{\,n-1}}{dt^{n-1}}(\Phi(t)^n\, f'(t)).$$

3) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$.

a) Justifier que l'on peut définir une fonction σ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ par

$$\sigma(s) = \frac{s}{g(s)} \qquad \text{si} \qquad s \neq 0,$$
$$\sigma(0) = \frac{1}{g'(0)}\cdot$$

b) Démontrer que la fonction σ est de classe C^1 au voisinage de 0.

c) Plus précisément, démontrer que la fonction σ est de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. [Pour cela, on pourra calculer et utiliser l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g'(st)\, dt$.]

4) Dans la fin de cette partie du problème, on conserve la fonction g de la question (III.3). Expliquer l'existence d'un intervalle J, voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, et d'une fonction h, de classe C^∞ sur $g(\mathrm{J})$, qui soit réciproque de la restriction $g|\mathrm{J}$.

5) Les résultats des questions (III.1) et (III.2) restent valables lorsque la fonction Φ n'est définie que dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ car d'emblée on n'a utilisé que des propriétés locales de la fonction Φ. On pourra utiliser ces résultats dans ce cadre plus étendu.

Dans cette question, on prend pour fonction f la fonction identique (caractérisée par $f(x) = x$) et pour fonction Φ la fonction σ définie dans la question (III.3).

a) Démontrer que l'on a alors $\varphi(x,0) = h(x)$ pour x voisin de 0.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, les fonctions $\dfrac{d^n h}{dx^n}$ et $\dfrac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}$ prennent la même valeur au point 0, c'est-à-dire

$$\frac{d^n h}{dx^n}(0) = \frac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}(0).$$

Cette relation constitue la *formule de réversion de Lagrange.*

6) Plus généralement, démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute fonction f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, la relation

$$\frac{d^n(f \circ h)}{dx^n}(0) = \frac{d^{n-1}(\sigma^n f')}{dt^{n-1}}(0).$$

IV . Application à la suite (u_n)

1) Pour $p \geqslant 1$ et $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$, on pose

$$\tau_p(x) = \frac{x}{(1+x)^{p+1}}.$$

Rappelons que ρ_p désigne le rayon de convergence de la série entière S_p calculé dans la question (II.1).

Démontrer que la fonction τ_p réalise un homéomorphisme de l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{p}\right]$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$, et un difféomorphisme de classe C^∞ de l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{p}\right[$ sur l'intervalle $[0, \rho_p[$,

2) Pour $p \geqslant 1$, on note $w_p : [0, \rho_p] \to \mathbf{R}$ la fonction réciproque de la restriction de la fonction τ_p à l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{p}\right]$. Démontrer, à l'aide de la formule de réversion de Lagrange, que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

3) Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ une série à termes > 0. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

On se propose de démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente. Pour cela, on choisit un nombre réel β tel que $1 < \beta < \alpha$, et on considère la série de terme général $b_n = 1/n^\beta$.

a) Dire pourquoi la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} b_n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente.

4) On a introduit dans la question (II.1) la série entière S_p définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1} x^n,$$

et on a calculé son rayon de convergence ρ_p.

Démontrer que cette série entière est convergente sur tout l'intervalle $[-\rho_p, \rho_p]$.

5) On se propose de démontrer l'égalité $w_p = 2\,\mathrm{S}_p$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$.

a) Démontrer que les fonctions $x \mapsto 2\,\mathrm{S}_p(x) - x\,(1 + 2\,\mathrm{S}_p(x))^{p+1}$ et $x \mapsto w_p(x) - x\,(1 + w_p(x))^{p+1}$ ont mêmes développements limités à tous ordres, au voisinage de 0.

b) En déduire que, pour tout $x \in [0, \rho_p]$, on a $2\,\mathrm{S}_p(x) - x\,(1 + 2\,\mathrm{S}_p(x))^{p+1} = 0$.

c) En déduire que l'on a $w_p = 2\,\mathrm{S}_p$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$.

6) a) Vérifier que le nombre réel v_p défini dans la question (II.4) appartient à l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{p}\right]$ pour $p \geqslant 1$.

b) Déduire de ce qui précède une autre démonstration, pour $p \geqslant 1$, de la relation

$$(\mathrm{T}_p) \qquad u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

de la partie II de l'énoncé.

——— ◦ ◦ ◦ ———

4.2.2 Solution de la deuxième épreuve écrite

I. La suite (u_n)

1) Existence et unicité de u_n. Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$, définie par

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1,$$

est continue et strictement croissante. Comme $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une unique solution $u_n \geqslant 0$ de l'équation (E_n), et cette solution est située dans l'intervalle $]0, 1]$.

2) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$, on a $f_{n+1}(x) > f_n(x)$; en particulier, $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n) = 0$, d'où on déduit $u_{n+1} < u_n$.

3. Relation. La relation s'obtient en multipliant l'égalité

$$u_n^n + u_n^{n-1} + \cdots + u_n - 1 = 0$$

par $(u_n - 1)$.

4.a) **Calcul de u_2.** On trouve $u_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\cdot$

4.b) La suite (u_n) tend vers $1/2$.

Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, pour tout entier $n > 1$, on a

$$0 \leqslant u_n^{n+1} \leqslant u_2^{n+1}.$$

Des inégalités $0 < u_2 < 1$, on déduit que u_2^{n+1} tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Il résulte alors de la relation (I.3) que u_n tend vers $1/2$.

5) $n\varepsilon_n$ tend vers 0. Toujours d'après la relation (I.3), on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$2n\varepsilon_n = nu_n^{n+1} \leqslant nu_2^{n+1}.$$

Comme on a $0 < u_2 < 1$, la suite nu_2^{n+1} tend vers 0, d'où le résultat demandé.

6) Développement asymptotique de u_n. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation (I.3) s'écrit

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^{n+1} = 2\varepsilon_n,$$

ou encore

$$\frac{1}{2^{n+1}}(1 + 2\varepsilon_n)^{n+1} = 2\varepsilon_n.$$

Comme

$$\ln\left((1 + 2\varepsilon_n)^{n+1}\right) = (n+1)\ln(1 + 2\varepsilon_n) \sim n2\varepsilon_n,$$

et que $n\varepsilon_n$ tend vers 0, d'après (I.5), on en déduit

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sim 2\varepsilon_n$$

et par suite

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

ce qui est le résultat demandé.

7.a) Détermination de s. L'option de résolution d'équation à la calculette donne comme valeurs approchées à 10^{-5} près $u_1 = 1,\ u_2 = 0.61803,\ u_3 = 0.54368,\ u_4 = 0.51879,\ u_5 = 0.50866,$ ce qui semble indiquer que $s = 5$. Vérifions rigoureusement ce résultat. Reprenons la famille de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ introduites dans (I.1). On a

$$f_4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) = -\frac{2959699}{10^8} < 0 = f_4(u_4) \quad \text{et} \quad f_5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) = \frac{49055351}{10^{10}} > 0 = f_5(u_5).$$

Les applications f_n sont strictement croissantes sur $[0, \infty[$; on en déduit l'encadrement
$$0 < u_5 - \frac{1}{2} < \frac{1}{100} < u_4 - \frac{1}{2}.$$
Comme la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante, il en résulte que l'entier cherché est $s = 5$.

7.b) Exemple de procédure. Pour tout entier $n \geqslant 1$, sur l'intervalle $[0, 1]$, la fonction f_n a un signe contraire à celui de la fonction g_n définie par
$$g_n(x) = (x - 1)f_n(x) = x^{n+1} - 2x + 1.$$
On recherche alors le premier entier $q > 1$ pour lequel on a
$$g_q\left(\frac{1}{2} + 10^{-p}\right)\, g_{q-1}\left(\frac{1}{2} + 10^{-p}\right) \leqslant 0.$$
Un tel entier existe puisque $u_1 = 1$ et que (u_n) tend vers $1/2$. Sans soulever de problème d'exponentiation rapide, cela peut s'implémenter de la manière suivante :

```
   début
initialiser q à 1
initialiser x à 1/2+1/10^p
tant que (x^(q+1)-2x+1)(x^q-2x+1)>0
faire
début de boucle
incrémenter q d'une unité
fin de boucle
afficher q
   fin
```

8.a) Équivalence d'inégalités. Les fonctions f_n étant strictement croissantes, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$\begin{aligned} u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} &\iff f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \geqslant 0 \\ &\iff g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \leqslant 0 \\ &\iff \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$
d'où le résultat.

8.b) Équivalence d'inégalités. La fonction ψ est définie, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et l'on a, pour $x > 0$,
$$\psi'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln 2.$$
Le tableau de variation peut s'écrire

x	0		1		$+\infty$
$\psi'(x)$	∞	$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	$-\ln 2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\psi(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(1 + x) - (x + 1)\ln 2 \sim -x \ln 2$ qui tend vers $-\infty$.

Ceci démontre que l'on a $\psi(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$(n + 1)\ln(n + 1) - n \ln n - (n + 1)\ln 2 \leqslant 0.$$

En prenant l'exponentielle, on obtient l'inégalité

(2) $$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

9.a) Encadrement de u_4 . La suite (u_n) est strictement décroissante et tend vers $\dfrac{1}{2}$ (questions I.2 et 4) ; la minoration $\frac{1}{2} < u_4$ résulte de cela. Par ailleurs, on a

$$f_4\left(\frac{6}{11}\right) = \frac{1373}{14641} > 0 = f_4(u_4).$$

Comme la fonction f_4 est strictement croissante pour $x \geqslant 0$, on a donc l'inégalité $u_4 < \frac{6}{11}$.

9.b) Inégalité. Les fonctions

$$\lambda : x \mapsto \frac{x}{2(1-x)} \qquad \text{et} \qquad \mu : x \mapsto \ln\left(\frac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1}\ln x - \ln(x+1)$$

sont strictement croissantes sur respectivement $[0,1[$ et $[1,+\infty[$. Pour la fonction homographique λ , c'est clair. Pour la fonction μ , on peut calculer

$$\mu'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{\ln x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$$

qui est $\geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. Comme la suite (u_n) est décroissante, pour $n \geqslant 4$, on a donc

$$\frac{u_n}{2(1-u_n)} \leqslant \frac{u_4}{2(1-u_4)} \qquad \text{et} \qquad \frac{4^{\frac{4}{5}}}{5} \leqslant \frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{n+1}.$$

Pour établir le résultat, il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\frac{u_4}{2(1-u_4)} < \frac{4^{\frac{4}{5}}}{5}.$$

D'après ce qui précède et l'encadrement (I.9.a), on a

$$\frac{u_4}{2(1-u_4)} < \lambda(6/11) = \frac{3}{5},$$

et l'inégalité $\dfrac{3}{5} < \dfrac{4^{\frac{4}{5}}}{5}$ se vérifie numériquement du fait que $3^5 = 243 < 4^4 = 256$.

II. Expression de u_n comme somme d'une série

1.a) Détermination de ρ_p . On applique par exemple la règle de d'Alembert en regardant si le quotient de deux coefficients successifs de la série entière a une limite. Pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2(n+1)}\binom{(n+1)(p+1)}{n}}{\frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}} &= \frac{\frac{1}{2(n+1)} \times ((n+1)(p+1))! \times (n-1)! \times (n(p+1)-n+1)!}{\frac{1}{2n} \times n! \times ((n+1)(p+1)-n)! \times (n(p+1))!} \\
&= \frac{((n+1)(p+1))! \times (n(p+1)-n+1)!}{(n+1) \times (n(p+1))! \times ((n+1)(p+1)-n)!} \\
&= \frac{(n(p+1)+p+1) \times \cdots \times (n(p+1)+1)}{(n+1) \times (np+p+1) \times \cdots \times (np+2)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière fraction rationnelle en n tend vers $\frac{(p+1)^{p+1}}{p^p}$ lorsque n tend vers l'infini. On en déduit bien

$$\rho_n = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

1.b) Convergence de la série du second membre de la relation T_p . Dans la question (I.8), on a démontré, pour $n \geqslant 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

C'est en réalité une inégalité stricte pour $n \geqslant 2$ puisque $\psi(x)$ est < 0 pour $x > 1$. D'après (II.1.a), pour $p \geqslant 2$, on a donc $0 < 1/2^{p+1} < \rho_p$ et la série de la relation (T_p) , qui n'est autre que $\mathrm{S}_p(1/2^{p+1})$, est convergente.

2.a) Identité. On l'établit par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car chaque membre prend pour valeur $1/8$. Supposons le vrai pour l'entier $n \geqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{2k+1}k}\binom{2k}{k-1} &= \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{2^{2n+3}(n+1)}\binom{2(n+1)}{n} + \frac{1}{2^{2n+3}(n+1)}\binom{2(n+1)}{n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(2n+3)}{2^{2n+3}(n+1)}\binom{2(n+1)}{n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2n+3}}\binom{2n+3}{n+1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2(n+3)}{2^{2n+5}(n+2)}\binom{2(n+2)}{n+1}
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle du développement des coefficients binomiaux ou par exemple de

$$\begin{aligned}
\frac{2(n+3)}{2^{2n+5}(n+2)}\binom{2(n+2)}{n+1} &= \frac{2(n+3)}{2^{2n+5}(n+2)}\binom{2(n+2)}{n+3} \\
&= \frac{2(n+3)2(n+2)}{2^{2n+5}(n+2)(n+3)}\binom{2n+3}{n+2} \\
&= \frac{1}{2^{2n+3}}\binom{2n+3}{n+1}
\end{aligned}$$

Ceci montre que le résultat est vrai pour l'entier $n+1$ et établit l'identité demandée.

2.b) Étude de T_1 **.** On a $u_1 = 1$. Posons

$$\xi_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k+1}k}\binom{2k}{k-1}.$$

Il s'agit d'établir que ξ_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. En utilisant (II.2.a) et la formule d'équivalence de Stirling, on a successivement

$$\begin{aligned}
1 - \xi_n &= \frac{2(n+2)}{2^{2n+3}(n+1)}\binom{2(n+1)}{n} \\
&= \frac{2(n+2) \times (2(n+1))!}{2^{2n+3}(n+1) \times n! \times (n+2)!} \\
&\sim \frac{2\sqrt{\pi n}\ (2(n+1))^{2(n+1)}e^{-2(n+1)}}{2^{2n+2} \times \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n} \times \sqrt{2\pi n}\,(n+2)^{n+2}e^{(n+2)}},
\end{aligned}$$

d'où après simplification,

$$1 - \xi_n \sim \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où le résultat.

3) Identité. C'est immédiat par substitution de $n(p+1)$ à q.

4) Identité satisfaite par v_p **.** En reportant $u_p = (1+v_p)/2$ dans la relation $u_p^{p+1} - 2u_p + 1 = 0$, valable pour tout entier $p \geqslant 1$, on obtient

$$\left(\frac{1+v_p}{2}\right)^{p+1} = v_p\,,$$

c'est-à-dire (puisque $1 + v_p \neq 0$)

$$\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

On en déduit, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{v_p^n}{(1+v_p)^{n(p+1)}} = \frac{1}{2^{n(p+1)}}.$$

Comme on suppose $p \geqslant 2$, on a $0 < v_p < 1$ et il vient par la question précédente

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k} = \frac{1}{2^{n(p+1)}}.$$

5.a) Relation U_p. En reportant ce qui précède, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1}n}\binom{n(p+1)}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2n}\binom{n(p+1)+k-1}{k}\binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{n+k},$$

ce qui est le résultat demandé.

5.b) Étude de la série $\sum_{k\geqslant 0} |a_{n,k}|$. Comme dans la question (II.4), on applique le résultat du Préliminaire rappelé dans la question (II.3) avec $x = -v_p$ qui appartient à l'intervalle $]-1, 0[$ puisqu'on a supposé $p \geqslant 4$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la série

$$\sum_{k\geqslant 0} \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^k$$

est convergente et a pour somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^k = \frac{1}{(1-v_p)^{n(p+1)}}.$$

Il en résulte la convergence de la série $\sum_k |a_{n,k}|$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, les égalités

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)+k-1}{k}\binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{n+k} \\
&= \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1} v_p^n \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^k \\
&= \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}\left(\frac{v_p}{(1-v_p)^{(p+1)}}\right)^n
\end{aligned}$$

5.c) Sommabilité de $\sum_{n\geqslant 1, k\geqslant 0} |a_{n,k}|$. D'après l'étude menée sur la série entière S_p au début de cette partie, il suffit de vérifier l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{v_p}{(1-v_p)^{p+1}} < \rho_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

Par définition de v_p et de u_p, on a

$$\frac{v_p}{(1-v_p)^{p+1}} = \left(\frac{u_p}{2(1-u_p)}\right)^{p+1}.$$

Dans la question (I.9.b) on a démontré que, pour $p \geqslant 4$, on a

$$0 \leqslant \left(\frac{u_p}{2(1-u_p)}\right)^{p+1} < \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

D'où le résultat.

6.a) L'endomorphisme Δ_q est nilpotent. L'application Δ_q est clairement linéaire, et elle abaisse d'une unité le degré d'un polynôme. C'est donc un endomorphisme de $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ et on a $(\Delta_q)^q = 0$.

6.b) Identité. Soit T l'application qui, à un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ associe le polynôme TP défini par $(\mathrm{TP})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$. L'application T est un endomorphisme de $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ et on a $\Delta_q = \mathrm{T} - \mathrm{I}$, où I désigne l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$. L'égalité $(\Delta_q)^q = 0$ s'écrit

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j}\binom{q}{j}\,\mathrm{T}^j = 0.$$

En appliquant cette relation au polynôme P, on obtient l'identité demandée.

7.a) La série double $\sum a_{n,k}$. Pour $q \geqslant 2$, notons $\mathrm{A}(q)$ l'ensemble des couples (n,k) d'entiers tels que $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ et $n+k=q+1$. On a successivement, en appliquant la définition de $a_{n,k}$, puis en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,k)\in \mathrm{A}(q)} a_{n,k} &= \sum_{(n,k)\in \mathrm{A}(q)} \frac{(-1)^k}{2n} \binom{n(p+1)+k-1}{k} \binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{q+1} \\
&= \sum_{(n,k)\in \mathrm{A}(q)} \frac{(-1)^k}{2n} \frac{(np+q)! \times (n(p+1))!}{(n(p+1)-1)! \times k! \times (np+1)! \times (n-1)!} \ v_p^{q+1} \\
&= \sum_{(n,k)\in \mathrm{A}(q)} \frac{(-1)^k}{2} \frac{(np+q)! \times (p+1)}{q! \times (np+1)!} \binom{q}{n-1} \ v_p^{q+1} \\
&= \frac{p+1}{q!} \sum_{n=1}^{q+1} (-1)^{q+1-n} \binom{q}{n-1} \frac{1}{2} (np+2)(np+3)\cdots(np+q) \ v_p^{q+1} \\
&= v_p^{q+1} \ \frac{p+1}{q!} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} \mathrm{P}_q(j)
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{P}_q(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}(p\mathrm{X}+p+2)\cdots(p\mathrm{X}+p+q) = \frac{1}{2}\prod_{s=2}^{q}(p\mathrm{X}+p+s).$$

Le polynôme P_q a pour degré $q-1$; la question précédente assure que cette somme est nulle, d'où le résultat annoncé.

7.b) Relation $\mathrm{T}_p,\ p \geqslant 4$. Comme $p \geqslant 4$, la question (II.5) permet d'appliquer le Préliminaire D à la série double $\sum a_{n,k}$. En appliquant la question (II.6), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(n,k)\in \mathrm{A}(q)} a_{n,k} = \sum_{(n,k)\in \mathrm{A}(1)} a_{n,k} = a_{1,0} = \frac{v_p}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1} \times n} \binom{n(p+1)}{n-1} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{v_p}{2}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1} \times n} \binom{n(p+1)}{n-1} = u_p$$

ce qui est la relation (T_p).

8.a) Détermination de μ_p. On a vu en (II.1.a) que λ_{n+1}/λ_n tend vers $1/2^{p+1}\rho_p$ Le nombre μ_p cherché est donc $1/2^{p+1}\rho_p$ qui est bien dans l'intervalle $]0,1[$ en vertu de l'inégalité établie en (II.1.b).

8.b) Convergence de la série $\sum \lambda_n$ et équivalent du reste. La série $\sum \lambda_n$ est une série à termes >0. Elle est convergente par la règle de d'Alembert et la question (II.8.a). On a déjà, pour $n>1$

$$\mathrm{R}_p(n-1) - \mathrm{R}_p(n) = \lambda_n.$$

Par ailleurs λ_n est le terme général d'une série convergente, à termes positifs, avec $\lambda_{n+1} \sim \mu_p \lambda_n$. Donc il vient, par sommation des relations d'équivalence

$$\mathrm{R}_p(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_{k+1} \sim \sum_{k=n}^{\infty} (\mu_p \lambda_k) = \mu_p \mathrm{R}_p(n-1).$$

En particulier

$$\mathrm{R}_p(n-1) = \frac{1}{\mu_p}\,\mathrm{R}_p(n) + o(\mathrm{R}_p(n)).$$

On en déduit

$$\lambda_n = \frac{1-\mu_p}{\mu_p}\ \mathrm{R}_p(n) + o(\mathrm{R}_p(n)),$$

ou encore, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\lambda_n \sim \frac{1-\mu_p}{\mu_p}\ \mathrm{R}_p(n) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{R}_p(n) \sim \frac{\mu_p}{1-\mu_p}\ \lambda_n.$$

On peut aussi raisonner directement. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier N tel que, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$\mu_p(1-\varepsilon)\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant \mu_p(1+\varepsilon)\lambda_n.$$

On a alors

$${\mu_p}^k(1-\varepsilon)^k\lambda_n \leqslant \lambda_{n+k} \leqslant {\mu_p}^k(1+\varepsilon)^k\lambda_n,$$

d'où en sommant

$$\frac{\mu_p(1-\varepsilon)}{1-\mu_p(1-\varepsilon)}\lambda_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n+k} \leqslant \frac{\mu_p(1+\varepsilon)}{1-\mu_p(1+\varepsilon)}\cdot$$

III. Réversion de Lagrange

1.a) Existence de φ. La fonction Φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, la fonction F est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$. On a $\mathrm{F}(0,0,0)=0$ et

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x,t,y) = -1 + x\Phi'(y), \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(0,0,0) = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$, un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de classe C^∞ tels que :

$$(\forall (x,t) \in \mathrm{U}), (\forall y \in \mathrm{V}), \quad \mathrm{F}(x,t,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x,t).$$

1.b) Calcul de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot$ En dérivant l'égalité

$$\mathrm{F}(x,t,\varphi(x,t)) = 0,$$

on obtient

$$(-1+x\Phi')\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \Phi\circ\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 + (-1+x\Phi')\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (\Phi\circ\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot$$

2.a) Expression de $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot$ L'application u est de classe C^∞ sur U comme composée de fonctions de classe C^∞, et l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (f'\circ\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = (f'\circ\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

On déduit de ces égalités et de (III.1.b) la relation demandée

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\Phi\circ\varphi)\,\frac{\partial u}{\partial t}\cdot$$

2.b) Expression de $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\cdot$ On raisonne par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$. La question (III.2.a) assure que le résultat est vrai pour $n=1$. Supposons le résultat vrai pour un entier $n \geqslant 1$. On a donc dans U, par hypothèse, l'égalité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}\big((\Phi\circ\varphi)^n \times \frac{\partial u}{\partial t}\big)}{\partial t^{n-1}},$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi^n(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right].$$

On a successivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi^n(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= n\Phi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\Phi^{n-1}(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t} + \Phi^n(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ &= n\Phi'(\varphi)\Phi^n(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \Phi^n(\varphi)\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ &= (n+1)\Phi'(\varphi)\Phi^n(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \Phi^{n+1}(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi^{n+1}(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Il vient alors, dans U, la relation

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n\left((\Phi\circ\varphi)^{n+1}\times\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial t^n},$$

ce qui permet de voir que le résultat est vrai pour l'entier $n+1$. Il est donc vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

2.c) Expression de $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)\cdot$ Ce qui précède fournit, sur un voisinage de l'origine, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\Phi^n(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}\right](0,t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left((\Phi\circ\varphi)^n(0,t)\times\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)\right).$$

Sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}$, on a $\varphi(0,t)=t$; on en déduit

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\Phi^n(t)f'(t)\right).$$

3.a) Existence de σ. La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et $g(0)=0$. On a donc, au voisinage de $s=0$, le développement limité

$$g(s) = 0 + sg'(0) + o(s). \tag{D1}$$

On a de plus $g'(0)\neq 0$; on en déduit $g(s)\sim sg'(0)$ au voisinage de $s=0$. Par suite, il existe un voisinage I_1 de 0 où la fonction g ne s'annule qu'en 0. On peut alors définir la fonction σ sur I_1.

3.b) La fonction σ est de classe C^1. La fonction σ est de classe C^∞ sur $\mathrm{I}_1\backslash\{0\}$ comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ sans 0 au dénominateur. La relation (D1) permet de voir que $s/g(s)$ tend vers $1/g'(0)$ quand s tend vers 0 avec $s\neq 0$, d'où la continuité au point $s=0$.

Les formules de Taylor au voisinage de 0 pour les fonction g et g' s'écrivent

$$\begin{aligned}g(s) &= 0 + sg'(0) + \frac{1}{2}s^2g''(0) + o(s^2),\\ g'(s) &= g'(0) + sg''(0) + o(s).\end{aligned}$$

On en déduit, pour $s\in \mathrm{I}_1\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}\sigma'(s) &= \frac{g(s)-sg'(s)}{g(s)^2}\\ &= \frac{sg'(0)+\frac{1}{2}s^2g''(0) - s(g'(0)+sg''(0)) + o(s^2)}{(sg'(0)+o(s))^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}s^2g''(0)+o(s^2)}{s^2g'(0)^2+o(s^2)} \qquad \text{qui tend vers} \quad -\frac{g''(0)}{2g'(0)^2}.\end{aligned}$$

Le théorème de prolongement de classe C^1 permet de déduire que σ est de classe C^1 sur I_1.

On peut aussi raisonner directement : pour $s\in \mathrm{I}_1\backslash\{0\}$, on a

$$\begin{aligned}\sigma(s)-\sigma(0) &= \frac{s}{sg'(0)+\frac{1}{2}s^2g''(0)+o(s^2)} - \frac{1}{g'(0)}\\ &= \frac{1}{g'(0)}\left(1-\frac{sg''(0)}{2g'(0)}+o(s)\right) - \frac{1}{g'(0)}\\ &= -\frac{sg''(0)}{2g'(0)} + o(s)\end{aligned}$$

La dernière égalité montre que la fonction σ est dérivable au point 0 ; il reste à vérifier que cette dérivée est bien la limite de $\sigma'(s)$ quand s tend vers 0 avec $s \neq 0$.

3.c) La fonction σ est de classe C^∞. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g'(st)\;dt$ est une fonction de classe C^∞ de la variable s car c'est une intégrale à paramètre sur un segment dont l'intégrande est une fonction de deux variables de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$. Remarquons que l'on a, pour $s \in I_1 \setminus \{0\}$

$$\int_0^1 g'(st)\;dt = \frac{1}{s}(g(s) - g(0)),$$

D'où, pour s dans I_1 tout entier,

$$\sigma(s) = \Big(\int_0^1 g'(st)\;dt\Big)^{-1}.$$

L'intégrale ne s'annulant pas sur I_1, la fonction σ est donc de classe C^∞ sur I_1.

4) Éxistence d'une fonction réciproque locale. La fonction g est de classe C^∞ et $g'(0) \neq 0$; il existe donc un voisinage $J \subset I_1$ autour de 0 où g' ne s'annule pas et garde un signe constant. La fonction g réalise alors un C^∞ difféomorphisme de J sur son image $g(J)$, d'où le résultat demandé.

5.a) $\varphi(x, 0) = h(x)$. Reprenons les voisinages U et V que nous avons associés à F dans la question (III.1.a), c'est-à-dire tels que

$$(\forall (x,t) \in U), (\forall y \in V), \quad F(x,t,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x,t).$$

On peut supposer $V \subset J$. Introduisons alors un voisinage W de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que $W \times \{0\} \subset U$. On peut écrire, pour tout $x \in W$

$$\begin{aligned} F(x, 0, \varphi(x,0)) = 0 &\Longleftrightarrow -\varphi(x,0) + x\sigma(\varphi(x,0)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\varphi(x,0)}{\sigma(\varphi(x,0))} \\ &\Longleftrightarrow x = g(\varphi(x,0)) \\ &\Longleftrightarrow \varphi(x,0) = h(x) \end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat.

5.b) et 6) Formule de réversion. Ces deux questions s'articulant de la même manière, traitons la dernière. On prend $\Phi = \sigma$ et on considère alors la fonction u associée dans la question (III.2). La question (III.5.a) permet déjà d'écrire

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,0) = \left[\frac{d^n}{dx^n}(u(x,0))\right]_{x=0} = \left[\frac{d^n(f \circ h)}{dx^n}\right]_{x=0}$$

Par ailleurs, la question (III.2.c) fournit

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,0) = \left[\frac{d^{n-1}(\sigma^n f')}{dt^{n-1}}\right]_{t=0}$$

Le résultat annoncé en est une conséquence directe, puis le théorème de réversion de Lagrange s'obtient en prenant pour f l'application identique.

IV. Application à la suite (u_n).

1) Étude de la fonction τ_p. Soit p un entier $\geqslant 1$; la fonction τ_p est de classe C^∞ sur $[0, 1/p]$: c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\tau_p'(x) = \frac{1 - px}{(1+x)^{p+2}}.$$

Sur l'intervalle $[0, 1/p[$ la dérivée τ_p' est > 0, nulle en $x = 1/p$. La fonction τ_p est donc strictement croissante et elle réalise un homéomorphisme de l'intervalle $[0, 1/p]$ sur son image $[0, \rho_p]$. En outre, sa dérivée étant à valeurs > 0 sur $[0, 1/p[$, la fonction τ_p induit un C^∞ difféomorphisme de $[0, 1/p[$ sur $[0, \rho_p[$.

2) Expression de $w_p^{(n)}(0)$ **.** Soient n et p deux entiers $\geqslant 1$. On introduit sur l'intervalle $[0,1/p[$ la fonction σ de la question (III.3.a) associée à $g = \tau_p$. C'est la fonction définie par $\sigma(s) = (1+s)^{p+1}$. La formule de réversion (II.5.b)

$$\left[\frac{d^n(w_p)}{dx^n}\right]_{x=0} = \left[\frac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}\right]_{t=0}$$

s'écrit

$$w_p^{(n)}(0) = \left[\frac{d^{n-1}((1+t)^{n(p+1)})}{dt^{n-1}}\right]_{t=0}$$

Comme on a

$$(1+t)^{n(p+1)} = \sum_{k=0}^{n(p+1)} \binom{n(p+1)}{k} t^k,$$

un examen du coefficient de t^{n-1} donne

$$w_p^{(n)}(0) = (n-1)! \times \binom{n(p+1)}{n-1},$$

et donc

$$\frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}$$

3) Règle de Raabe-Duhamel. Classique.

4) Étude aux bords. On fixe un entier $p \geqslant 1$. D'après la question (II.1.a), la série entière S_p est convergente dans l'intervalle $]-\rho_p, \rho_p[$. Il suffit alors de démontrer la convergence en $x = \rho_p$, ce qui démontrera aussi l'absolue convergence en $x = -\rho_p$. Pour cela, on va calculer le rapport de deux termes consécutifs pour appliquer le résultat de la question précédente. On a successivement

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{(n+1)}\binom{(n+1)(p+1)}{n}\rho_p^{n+1}}{\frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}\rho_p^n} &= \frac{(n(p+1)+p+1)\times\cdots\times(n(p+1)+1)\rho_p}{(n+1)\times(np+p+1)\times\cdots\times(np+2)} \\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{n(p+1)}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \prod_{k=2}^{p+1}\left(\frac{1+\frac{k}{n(p+1)}}{1+\frac{k}{np}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{(p+1)+p+\cdots+1}{p+1} - \frac{(p+1)+p+\cdots+2}{p} - 1\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)} - \frac{(p+1)(p+2)}{2p} + \frac{1}{p} - 1\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

D'où la convergence de la série d'après la règle de Raabe- Duhamel de la question (IV.3).

5.a) Égalité des développements limités. On fixe un entier naturel $p \geqslant 1$. Les fonctions $2\mathrm{S}_p$ et w_p sont continues sur $[0,\rho_p]$, de classe C^∞ sur $[0,\rho_p[$. En outre leurs dérivées à tous ordres coïncident à l'origine d'après la question (IV.2). Ces fonctions ont donc les mêmes développements limités à tous ordres en 0 .

Mais alors, les règles de calcul de développements limités montrent que les fonctions

$$x \mapsto 2\mathrm{S}_p(x) - x(1+2\mathrm{S}_p(x))^{p+1} \quad \text{et} \quad x \mapsto w_p(x) - x(1+w_p(x))^{p+1}$$

ont mêmes développements limités à tous ordres en 0 .

5.b) Relation pour S_p **.** On fixe un entier $p \geqslant 1$. Par définition des fonctions τ_p et w_p en (IV.1 et 2), on a, pour $x \in [0,\rho_p]$,

$$w_p(x) - x(1+w_p(x))^{p+1} = 0.$$

On déduit alors de la question précédente que l'on a, pour tout entier $s \geqslant 0$, et pour $x \in [0, \rho_p[$,

$$2\mathrm{S}_p(x) - x(1 + 2\mathrm{S}_p(x))^{p+1} = o(x^s).$$

Le membre de gauche de cette relation est somme d'une série entière. L'unicité du développement limité assure alors que la série entière est nulle. On a donc, pour tout $x \in [0, \rho_p]$

$$2\mathrm{S}_p(x) - x(1 + 2\mathrm{S}_p(x))^{p+1} = 0.$$

5.c) $w_p = 2\mathrm{S}_p$ **.** L'unique fonction w définie sur l'intervalle $[0, \rho_p]$, à valeurs dans l'intervalle $[0, 1/p]$ et satisfaisant à la relation $w(x) - x(1 + w(x))^{p+1} = 0$ est la fonction w_p. Pour établir le résultat, il suffit de démontrer que, sur l'intervalle $[0, \rho_p]$, la fonction $2\mathrm{S}_p$ est à valeurs dans $[0, 1/p]$. La fonction S_p est croissante et continue sur $[0, \rho_p]$ et $\mathrm{S}_p(0) = 0$. Il suffit de vérifier que $2\mathrm{S}_p(\rho_p) = 1/p$. Le nombre $2\mathrm{S}_p(\rho_p)$ est $\geqslant 0$ et satisfait à la relation

$$\frac{2\mathrm{S}_p(\rho_p)}{(1 + 2\mathrm{S}_p(\rho_p))^{p+1}} = \rho_p.$$

L'étude de la variation de la fonction τ_p sur $[0, +\infty[$ montre que l'équation $\tau_p(x) = \rho_p$ admet une unique solution positive qui est $1/p$. Il résulte de cela que l'on a $2\mathrm{S}_p(\rho_p) = 1/p$.

En conclusion, pour tout entier $p \geqslant 1$, on a la relation $2\mathrm{S}_p = w_p$.

6.a) Encadrement de v_p **.** Les questions (I.2), (I.4) et (I.8) fournissent l'encadrement

$$\frac{1}{2} < u_p \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\cdot$$

Pour $v_p = 2u_p - 1$, il en résulte l'encadrement

$$0 < v_p \leqslant \frac{1}{p}\cdot$$

6.b) Autre démonstration de la relation T_p **.** On fixe l'entier $p \geqslant 1$. En se rappelant l'inégalité $\frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \rho_p$ de la question (I.8), ce qui précède permet d'écrire

$$\frac{v_p}{(1 + v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}} \Longleftrightarrow \tau_p(v_p) = \frac{1}{2^{p+1}} \Longleftrightarrow v_p = w_p\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right) = 2\,\mathrm{S}_p\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)\cdot$$

Il en résulte

$$v_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}\frac{1}{2^{n(p+1)}}$$

puis

$$u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1} \times n}\binom{n(p+1)}{n-1},$$

ce qui est bien la relation T_p.

4.2.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

OBJET DU PROBLÈME

L'objectif du probléme, clairement énoncé dans le préliminaire, était d'établir que si u_n est la solution $\geqslant 0$ de l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0,$$

alors, on a pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1} \times n}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

Cette identité est établie de deux manières indépendantes, la première (parties **I** et **II**) étant directe et la seconde (parties **III** et **IV**) faisant intervenir la formule dite de réversion de Lagrange.

Les ingrédients pour ce probléme faisaient intervenir des études de suites réelles, équivalents, développement asymptotique, implémentation d'une procédure, séries entiéres, suites doubles sommables, manipulation trés modeste du théoréme des fonctions implicites (celui-ci rappelé trés précisément dans le préliminaire), calcul de dérivées partielles, intégrale à paramétres, critére de Raabe-Duhamel que l'on faisait établir, régles de calcul de développement limité.

PARTIE I

C'est cette partie qui a été la plus abordée par les candidats. On est conduit à regretter un grand manque de rigueur détecté notamment lors de la résolution d'équations par conditions nécessaires et non par conditions nécessaires et suffisantes. En outre, beaucoup de candidats ne prennent pas la peine de préciser les théorémes utilisés ni de vérifier toutes les hypothéses des théorémes qui leur sont rappelés.

Dans la question **I-1**, les outils essentiels sont la monotonie stricte et le théoréme des valeurs intermédiaires qui n'a pas toujours été cité.

Dans la question **I-2**, il convenait de bien mettre en évidence la manipulation d'inégalités strictes, ce qui a été omis par beaucoup de candidats.

Dans la question **I-4-a**, il s'agit de calculer u_2. Beaucoup de candidats ont détaillé un peu laborieusement les calculs ou bien en insistant sur le calcul du discriminant, ou bien en utilisant l'équation du troisiéme degré fournie en **I-3**, ce dernier développement étant bien entendu trés maladroit. On peut raisonnablement attendre d'un candidat à l'agrégation qu'il sache résoudre une équation du second degré.

La question **I-4-b**, a été mal traitée en général. La faute classique, qui peut paraître surprenante chez un enseignant en exercice, consiste à dire que comme $0 < u_n < 1$, alors $(u_n)^n$ tend vers 0.

La question **I-5**, a été peu abordée et pratiquement aucun candidat n'a établi le développement asymptotique demandé en **I-6**. Quelques raisonnements grossiérement faux ont été menés pour obtenir le résultat, en particulier l'utilisation de la formule du binôme dans la relation

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^{n+1} = 2\varepsilon_n.$$

Cette question a montré une incapacité générale de la plupart des candidats à manipuler correctement les équivalents, qui sont pourtant des outils bien pratiques de l'analyse.

La question **I-7** menait à l'écriture d'une procédure en français. La question **I-7-a**, fournie avec une indication, a été traitée souvent avec un manque de rigueur ; l'argument essentiel de cette question était la croissance stricte de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$. Signalons que la monotonie de la fonction f_n ne nécessitait aucune dérivation puisque cette fonction est somme de fonctions strictement croissantes et d'une fonction constante sur l'intervalle $[0, 1]$. La question **I-7-a** permettait de mettre en lueur la procédure demandée dans **I-7-b**. Plusieurs procédures ont été trouvées dans les copies, les unes utilisant les fonctions g_n de l'indication, les autres utilisant directement les fonctions f_n. La plupart des procédures étaient itératives ; quelques unes méritaient toutefois une petite explication. Signalons que quelques candidats donnent l'expression explicite de s en fonction de p à l'aide de la fonction partie entiére.

La question **I-8-a** a été trés peu abordée.

La question **I-8-b** consistait à faire l'étude d'une fonction. Rappelons que la dérivation d'une fonction doit être précécédée d'une justification de sa dérivabilité. En outre la limite de ψ en $+\infty$ est souvent trés mal justifiée.

Pratiquement aucun candidat n'a abordé la question **I-9-b**.

PARTIE II

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats.

La question **II-1-a** proposait le calcul de ρ_p . Le recours à la formule Stirling est possible pour cette question, mais les calculs sont laborieux. La plupart des candidats qui ont utilisé cette méthode n'ont pas abouti. On pouvait utiliser directement la régle de d'Alembert, qui menait à une expression se simplifiant facilement.

La question **II-2-a** invitait à procéder par récurrence, où les candidats ont fait preuve d'un manque de rigueur et de soin, surtout au niveau de la manipulation des coefficients binomiaux.

La question **II-2-b** rendait légitime l'utilisation d'équivalent. On est conduit à regretter le manque d'initiative des candidats pour l'utilisation de la formule de Stirling. Bon nombre de candidats ne pensent pas à homogénéiser

$$(2n+1)! = (2n+1) \times (2n)!,$$

ce qui les conduit à des erreurs dans les équivalents lorsqu'ils manipulent

$$\frac{(2n+1)^n}{n^n}.$$

La question **II-4** est traitée avec un manque de rigueur, notamment sans préciser que $0 < v_p < 1$.

La question **II-5-b** est trés peu abordée par les candidats et la question **II-5-c** n'a pas été traitée.

La question **II-6-a** est abordée par les candidats, qui montrent seulement la linéarité en oubliant en général de contrôler que Δ_q arrive dans $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$.

La plupart des candidats qui font la question **II-6-b** utilise une récurrence à la place d'une formule du binôme, pour cette question pourtant classique.

La question **II-7-a** n'est abordée par aucun candidat.

La question **II-8** n'est abordée que superficiellement par les candidats.

PARTIE III

Dans cette partie, on établit la formule de réversion de Lagrange. Les candidats n'ont en général traité que quelques questions de cette partie. Là encore, on est conduit à regretter le manque de rigueur et de soin des candidats qui ne prennent pas la peine de vérifier toutes les hypothéses des théorémes qui leur sont rappelés, comme le théoréme des fonctions implicites.

Ainsi la question **III-1** est traitée de maniére superficielle.

La question **III-2** a mis en évidence des lacunes de la part des candidats au niveau de la manipulation des dérivées partielles. Beaucoup de ceux qui ont abordé cette question ont placé une dérivée partielle sur la fonction f , qui est une fonction d'une variable réelle.

La suite de cette partie est abordée de maniére significative par un nombre trés faible de candidats.

PARTIE IV

Dans cette partie, on appliquait la formule de réversion de Lagrange à la fonction τ_p pour retrouver la relation (T_p). Cette partie est atteinte par trés peu de candidats. Ceci est regettable car elle contenait beaucoup de questions, proches du cours, comme la notion d'homéomorphisme, difféomorphisme, la régle de Raabe-Duhamel.

Épreuves orales

5 Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

Le présent rapport reprend les termes du rapport sur la session 2007. Le déroulement des épreuves n'a pas changé, et les observations et recommandations du précédent rapport sont encore adaptées. Nous jugeons cependant utile d'insister sur quelques points.

Dans la première épreuve, nous écrivons ci-dessous que le candidat a le choix de développer une démonstration, un exemple ou une application. Mais on ne peut se contenter de traiter un petit exercice d'entrainement. Le choix de l'exposé doit être fait avec soin car il révèle aux examinateurs la compréhension que le candidat a du sujet posé. D'autre part, le candidat ne doit pas s'étonner si les examinateurs lui demandent d'appliquer un théorème énoncé dans le plan à un exemple simple.

Dans la deuxième épreuve, la présentation des exercices reste très inégale d'un candidat à l'autre. C'est un élément d'appréciation de la compétence professionnelle des candidats qui ne devrait pas être négligé.

5.1.1 Session 2008

Le jury est, cette année encore, relativement satisfait de la prestation orale des candidats admissibles. Après les épreuves orales, la qualité des prestations a permis de pourvoir tous les postes offerts au concours d'agrégation. Pour le CAERPA, après une chute en 2007, le nombre des admissibles comme des admis est revenu au niveau des années 2004 à 2006. Il n'a cependant pas été possible de pourvoir la totalité des contrats offerts au concours.

5.1.2 Déroulement des épreuves

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début de la préparation (se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves. En règle générale, les jours de passage sont deux jours consécutifs. Noter que le jury siège les dimanches et jours fériés.

Le premier jour, le candidat choisit une enveloppe qui contient un choix de deux sujets d'exposés. Ces deux sujets sont du même grand groupe, soit algèbre et géométrie, soit analyse et probabilités. Pendant la préparation, le candidat choisit le sujet qu'il va traiter ; il est peu stratégique d'hésiter trop longtemps entre les deux sujets.

Le deuxième jour (en général), le candidat choisit une enveloppe contenant un choix de deux sujets de l'épreuve d'exercices. Ces deux sujets sont du grand groupe que le candidat n'a pas tiré lors de l'épreuve d'exposé.

Le jury veille à ce que les sujets de chaque couplage soient suffisamment différenciés pour qu'il y ait un vrai choix.

5.1.3 Evolution du concours

Le rapport de la session 2005 avait annoncé une certaine évolution de la première épreuve orale. Depuis la session 2006, on a introduit dans la liste des titres d'exposés des sujets plus larges que les sujets habituellement posés. L'introduction des « leçons de synthèse » a entraîné bien entendu la suppression d'un certain nombre des leçons plus spécialisées qui étaient précédemment proposées.

Ces sujets plus larges sont facilement identifiables dans les listes qui suivent. Ils doivent être traités dans les mêmes conditions que les autres sujets, c'est-à-dire que l'épreuve comprend bien trois parties (plan, développement, questions des examinateurs) comme indiqué ci-dessous.

Le plan prendra plus la forme d'un exposé que d'une leçon. Ainsi, le candidat qui traite le sujet sur la trigonométrie pourra suivre cette notion dans les programmes de l'enseignement du second degré pour conclure sur les définitions rigoureuses utilisant les séries entières, ou bien suivre un processus inverse.

Il n'est aucunement demandé aux candidats un exposé exhaustif de ces questions larges en quinze minutes. L'objectif de ces sujets n'est pas de favoriser une préparation au concours par bachotage. Il s'agit au contraire de permettre aux professeurs en exercice de valoriser leur expérience et leur réflexion pédagogique.

Le développement doit répondre aux critères généraux indiqués ci-dessous. Ce doit être un développement rigoureux et significatif d'un point particulier cohérent avec le sujet.

Les thèmes de la seconde épreuve ne sont pas changés. Mais là encore, l'expérience et la compétence pédagogique doivent se valoriser dans la présentation d'une séance d'exercice.

5.1.4 Préparation aux épreuves et documents

Pendant la préparation, tout document personnel est interdit. Seuls sont autorisés les livres et revues en vente libre dans le commerce. Les candidats peuvent utiliser les livres de la bibliothèque qui est mise à leur disposition, et dont l'inventaire figure en fin de ce rapport. Ils peuvent aussi utiliser leurs livres personnels à condition que ces livres ne soient pas annotés. Lors des trois heures de préparation, les candidats sont libres, à tout moment, de consulter ou d'emprunter des livres à la bibliothèque ou de prendre dans leurs bagages les livres qu'ils ont apportés.

Les calculatrices de poches sont considérées comme des document personnels et sont, à ce titre, interdites. Cependant, selon le sujet traité, l'usage d'une calculatrice peut être autorisé par le président du jury, ou son représentant, à condition que le candidat justifie de son utilisation lors de la présentation de l'exposé ou des exercices devant la commission d'oral.

5.2 La première épreuve orale

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement, puis les questions du jury. Chacune dure un quart d'heure. Elle est précédée d'une préparation de trois heures. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet. Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages. Il faut bien sûr maîtriser les résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité, mais si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres outils du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi.

Les deux premières parties de l'épreuve (plan et exposé) se déroulent sans interruption ; les questions ne débutent qu'ensuite et portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté. Ce mode de fonctionnement impose au candidat de faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau (recto verso si le tableau le permet). Il y a bien assez de place à condition de gérer correctement le tableau.

Le plan

En voici le principe : en quinze minutes, il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications. . .Cela doit ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration. Il doit être conforme au programme de l'agrégation interne.

Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets et exacts, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples et quelques figures. Mais il est important aussi de montrer que l'on a compris l'utilité et la portée du chapitre en donnant des applications, surtout si le titre de la leçon le demande explicitement.

Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et la durée de quinze minutes. Beaucoup de candidats restent dix minutes sur des généralités avant de « bâcler au sprint » les résultats importants ou les applications. Les abréviations sont tolérées, on peut s'abstenir d'écrire quelques résultats proches d'autres résultats déjà mentionnés, mais les propositions et les définitions doivent être intégralement écrites au tableau « prêtes à être apprises par des élèves ». L'énoncé oral des prérequis est possible : en modérer la longueur.

Le candidat peut consulter ses notes personnelles en cours d'exposé, mais ne peut se contenter de les recopier !

Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est déconseillé d'attendre ce moment pour prendre une décision et de montrer aux examinateurs des hésitations sur ce choix

Le plan, comme le développement, ne peuvent se limiter à un compte rendu de lecture d'un ouvrage, si bon que soit cet ouvrage. C'est ainsi qu'il est fortement déconseillé aux candidats de se servir d'ouvrages se présentant comme des recueils de leçons modèles à l'usage des concours. Les examinateurs sont rarement dupes et arrivent, notamment lors des questions au candidat, à vérifier les connaissances du candidat et sa compréhension réelle du sujet.

Par ailleurs, le jury est plus indulgent pour un plan de niveau mathématique modeste, mais bien maîtrisé, que pour un exposé plus ambitieux que le candidat récite par cœur sans en avoir compris les articulations. Cela dit, l'exposé ne peut pas non plus se cantonner au niveau de conceptualisation d'une séance de collège. Un exposé sur le cercle ne peut rester au niveau de la classe de sixième. Un exposé sur les congruences ne peut se limiter à la divisiblité des nombres entiers traitée au niveau du collège.

L'exposé des prérequis et des notations est indispensable dans la plupart des leçons. Parfois, le choix de prérequis trop forts vide la leçon de son sens. Ainsi, un candidat qui traite une leçon *Trigonométrie* ne peut admettre en prérequis les formules d'Euler et se contenter d'en déduire les relations d'addition de la trigonométrie réelle. Les candidats doivent aussi prendre garde que le sujet choisi peut être traité dans certains manuels au long de plusieurs chapitres. Ainsi, dans la leçon sur la dimension des espaces vectoriels, admettre en prérequis que si l'espace vectoriel est engendré par n vecteurs, toute famille libre compte au plus n vecteurs, c'est évacuer un point faisant partie intégrante de la leçon.

Le développement

Le candidat a le choix de développer une démonstration, un exemple ou une application. Ce choix doit être consistant, cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes. Il doit porter sur une partie significative de l'exposé : un même développement, bien préparé pendant l'année, peut servir dans plusieurs leçons, mais pas dans toutes. Ainsi, les intégrales de Wallis ne constituent pas le développement souhaité dans la leçon sur le calcul d'aires et de volumes. Le théorème sur l'uniforme continuité des fonctions définies et continues sur un espace compact s'applique évidemment aux fonctions continues sur une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, mais ce n'est sans doute pas le cœur de la leçon.

Pendant cette phase le candidat doit mettre en valeur ses qualités pédagogiques, il doit travailler sans notes ; il a compris ce qu'il expose et le rend compréhensible à son auditoire :

- il commence par expliquer les idées importantes de la démonstration avant de rentrer dans les détails techniques,

- il s'appuie le plus possible sur des figures, et pas seulement en géométrie,

- il insiste sur les points difficiles,

- il montre qu'il a bien compris le rôle de chacune des hypothèses

Nous conseillons aux candidats de préparer soigneusement cette partie.

Les questions du jury

Le candidat doit avoir conscience que, par ses questions, le jury ne cherche qu'à

- corriger une erreur commise, rectifier une imprécision dans le plan ou une démonstration,

- contrôler si la démonstration est comprise ou seulement récitée, par exemple en variant les hypothèses,

- vérifier que le candidat a une maîtrise suffisante des sujets abordés : par exemple un candidat qui a énoncé le théorème de Heine ne devrait pas avoir de difficulté à démontrer que la fonction *sinus* est uniformément continue sur toute la droite,

- donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances sur d'autres aspects du sujet ou des applications, en restant dans le cadre du programme.

On ne demande pas à un candidat qui vient de passer déjà plus de trente minutes d'épreuve devant un jury d'improviser la résolution d'un exercice.

Ainsi, le candidat ne doit pas se laisser démonter par ces questions, leur seul but est de lui permettre de se valoriser.

Choix des leçons

Cette année comme l'année dernière, un plus grand nombre de candidats ont choisi les sujets des leçons de synthèse. Les candidats qui ont choisi l'un de ces sujets ont eu des prestations de niveau varié, certaines très bonnes, mais, dans beaucoup de cas, médiocres faute d'une structuration pertinente du plan et faute aussi, sans doute, de l'habitude de présenter un ensemble bien articulé de savoirs.

Comme les années précédentes, le jury a constaté une réticence de la part d'un bon nombre de candidats à choisir une leçon de géométrie ou de calcul des probabilités. C'est regrettable car la préparation au concours interne d'agrégation pourrait être l'occasion pour les professeurs de mettre à jour leurs connaissances dans ces deux domaines qui ont une place importante dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire.

5.3 La seconde épreuve orale

Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve, comme la précédente, dure 45 minutes au maximum et elle est précédée de trois heures de préparation.

A son arrivée, le candidat tire au sort une enveloppe comportant deux thèmes d'exercices et choisit l'un d'entre eux. Il dispose alors de trois heures pendant lesquelles il peut librement consulter les ouvrages mis à sa disposition par la bibliothèque de l'agrégation, ou bien ceux qu'il aura pris soin d'apporter avec lui.

Pendant sa préparation, le candidat sélectionne trois à six exercices correspondant au thème retenu et rédige un document comportant la liste des énoncés, ainsi que les motivations et remarques correspondantes. A l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs ; ces photocopies sont remises aux examinateurs et l'épreuve orale proprement dite peut alors commencer.

L'épreuve se déroule alors en trois temps :

1) Présentation motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat (durée maximale de 15 minutes).

2) Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de 15 minutes).

3) Questions du jury (durée minimale de 15 minutes).

Présentation motivée des exercices

Il s'agit d'expliquer les raisons qui ont conduit au choix des exercices. Celles-ci peuvent être d'ordre pédagogique ou d'ordre mathématique, l'un n'excluant évidemment pas l'autre. Voici quelques suggestions quant aux motivations possibles :

Objectif : Il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, ... On peut préciser la nature du travail de l'élève (exercice d'entraînement, de réinvestissement, d'évaluation, de recherche...) ainsi que les apprentissages visés.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être soulignées. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées constitue un aspect possible de la présentation des exercices.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée. Penser à indiquer la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement.

Intérêt : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion, ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Lorsqu'il existe diverses méthodes pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples. Ceci peut également constituer une motivation intéressante.

Bien souvent, les candidats n'ont pas pris la peine de réfléchir à cette première partie de leur oral et se contentent de donner lecture de leurs énoncés en quelques minutes. D'autres encore, pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux les quinze minutes dont ils disposent, en diluant la présentation de leurs exercices à grands coups de phrases creuses comme « J'ai choisi de vous proposer tel exercice parce que je le trouvais intéressant », ou bien « Tel exercice conduit à la démonstration de tel résultat, ce qui est bien pratique ». D'autres enfin, se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : ce n'est pas cela non plus qui est attendu.

Une autre erreur à éviter est le hors sujet : le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet. De plus, si l'intitulé est du type « Exercices faisant intervenir telle notion ... », il faut bien comprendre qu'on ne demande pas de simples exercices d'entraînement sur la notion en question. A titre d'exemple, si l'intitulé est « Exercices faisant intervenir des déterminants », on ne saurait se limiter au calcul de quelques déterminants. On attend en revanche des exercices montrant diverses utilisations de cette notion (à titre indicatif : résolution des systèmes de

Cramer, calcul des valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide du polynôme caractéristique, déterminants de Gram, calcul de la distance d'un point à un sous-espace de dimension finie, jacobien et caractérisation des difféomorphimes, caractérisation de la positivité des matrices symétriques réelles et application à la convexité d'une fonction numérique de plusieurs variables réelles par sa matrice Hessienne, etc.).

Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est expliquer la pertinence de ce choix, préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique ... tout ceci doit faire l'objet d'une réflexion personnelle et d'un réel questionnement.

Certains candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, et mettent ainsi en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels. Il va de soi qu'il en est tenu compte dans la notation de l'épreuve.

Résolution détaillée d'un exercice

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs. Au cours de cette phase, tout comme pour la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Tout d'abord, la pertinence du choix de l'exercice sera un élément important d'appréciation. Il s'agit de trouver un juste équilibre entre deux situations extrêmes : on voit parfois des candidats énumérer quatre énoncés d'exercices plutôt consistants pour finalement proposer la résolution d'un premier exercice très élémentaire. Ceci est bien sûr à éviter, mais il ne faut pas non plus tomber dans l'excès inverse : on voit aussi des candidats s'engager dans la résolution d'un exercice dont ils n'avaient visiblement pas mesuré la complexité. Présenter un exercice difficile impose qu'on en maîtrise les différents aspects, et cela ne s'improvise pas le jour de l'oral.

Bref : ni trop rudimentaire, ni trop ambitieux !

On doit par ailleurs bien comprendre qu'un exercice ne peut consister en la démonstration d'un théorème du cours. Par exemple, le fait que les seuls idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers en sont les sous-groupes $n\mathbf{Z}$ doit raisonnablement faire partie d'un plan de cours sur la divisibilité dans $\mathbf{Z}$, mais ne saurait être proposé en exercice de la seconde épreuve.

Ajoutons encore que certains candidats s'avèrent incapables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices. Par exemple, le théorème du changement de variables pour les intégrales multiples est le plus souvent utilisé de manière « formelle », les candidats se trouvant la plupart du temps dans l'incapacité de formuler la moindre hypothèse de validité, y compris dans un cas particulier usuel comme celui des coordonnées polaires. Une telle situation est évidemment dommageable pour le candidat.

Enfin, le jury va évaluer la prestation du candidat en tenant compte de critères mathématiques (clarté de la démonstration, précision des arguments), mais aussi de critères non mathématiques, comme la fluidité de l'élocution et la gestion du tableau. Sur ce dernier point, il est regrettable que certains candidats (heureusement peu nombreux) présentent leurs calculs au tableau de façon véritablement chaotique ; ceci est du plus mauvais effet surtout de la part d'un professeur déjà en fonction. Une écriture lisible, des calculs correctement organisés, un certain équilibre entre les explications données oralement et celles écrites au tableau : ce sont des compétences professionnelles que les épreuves orales évaluent.

Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Tout d'abord, il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé. Ceci permet de corriger d'éventuels lapsus (ou de mettre en évidence une faille dans la démonstration) et de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Ensuite, le candidat pourra être questionné sur un autre exercice figurant dans sa liste, ou sur un prolongement de l'un de ces exercices.

Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, le candidat, par un choix d'exercices trop ambitieux, risque d'élever le niveau des questions qui peuvent lui être posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Du reste, il n'est pas nécessaire de prendre un tel risque, puisqu'un choix bien équilibré d'exercices de niveau moyen, suivi d'un exposé correctement maîtrisé permettent d'obtenir une bonne note à l'épreuve.

Pour terminer, soulignons clairement que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances afin de le classer, le plus justement possible, par rapport aux autres candidats.

5.4 Liste des sujets de la session 2008

Leçons d'algèbre et géométrie

❁ ❁ ❁

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.

103 Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

104 Nombres premiers.

105 PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.

106 PGCD dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$, où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.

107 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.

108 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang.

109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.

110 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications.

111 Changements de bases en algèbre linéaire. Applications.

112 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.

113 Déterminants. Applications.

116 Homothéties-translations. Applications.

118 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.

120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.

122 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications géométriques.

123 Nombres complexes et géométrie.

125 Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.

126 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.

127 Géométrie du triangle.

128 Barycentres. Applications.

130 Droites et plans dans l'espace.

131 Projections et symétries dans un espace affine de dimension finie.

137 Cercles et droites dans le plan affine euclidien.

139 Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements. On pourra se limiter aux mouvements plans.

140 Division euclidienne.

142 Utilisation de groupes en géométrie.

143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.

144 Rang en algèbre linéaire.

145 Utilisation de transformations en géométrie.

146 Coniques.

147 Courbes planes paramétrées. ______________________________

148 Angles. ______________________________

149 Équations et géométrie. ______________________________

150 Factorisation de matrices. ______________________________

151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. ______________________________

154 Trigonométrie. ______________________________

155 Systèmes linéaires. ______________________________

156 Valeurs propres. ______________________________

157 Arithmétique dans $\mathbf{Z}$. ______________________________

158 Actions de groupes. Exemples et applications ______________________________

Leçons d'analyse et probabilités

❁ ❁ ❁

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.

202 Séries à termes réels positifs. Applications.

203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).

204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.

205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.

206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.

207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

208 Théorème du point fixe. Applications.

209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

210 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π .

215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.

216 Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis. Applications.

217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.

220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration de l'erreur.

221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.

222 Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle compact. Propriétés.

223 Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.

224 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a , b , c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples.

227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Fonctions composées.

228 Fonctions différentiables définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Inégalité des accroissements finis. Applications.

229 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Approximations de cette loi.

230 Probabilité conditionnelle et indépendance. Couples de variables aléatoires. Exemples.

231 Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.

232 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.

233 Approximation d'un nombre réel. Théorie et méthodes.

234 Équations différentielles.

235 Exponentielles et logarithmes.

236 Continuité, dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle.

237 Intégrales et primitives.

238 Le nombre π .

240 Problèmes d'extremums pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

241 Diverses notions de convergence (on pourra se placer dans des contextes variés). Exemples.

242 Suites de nombres réels.

243 Fonctions numériques de deux variables réelles ; courbes de niveau, gradient.

244 Égalités et inégalités (on pourra s'intéresser aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de Parseval...).

245 Équations fonctionnelles.

246 Applications de l'analyse au calcul des grandeurs (aires, volumes...).

247 Limites à l'infini.

248 Mouvement à accélération centrale.

249 Loi normale.

Exercices d'algèbre et géométrie

❁ ❁ ❁

301 Exercices sur les groupes.

302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.

303 Exercices faisant intervenir la division euclidienne.

304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.

307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.

308 Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

309 Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.

311 Exercices faisant intervenir la notion de rang.

312 Exercices faisant intervenir des matrices inversibles.

313 Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.

314 Exercices faisant intervenir des déterminants.

315 Exercices faisant intervenir la recherche et l'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.

316 Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.

317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.

318 Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.

319 Exercices faisant intervenir des méthodes ou des d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.

320 Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.

321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.

322 Exercices sur les formes quadratiques.

323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

324 Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.

325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.

326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.

327 Exercices faisant intervenir des applications affines.

329 Exercices sur les aires et les volumes.

330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.

331 Exercices sur la cocyclicité.

332 Exercices sur les cercles.

333 Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.

334 Exercices sur les coniques.

335 Exemples d'étude de courbes planes.

337 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

338 Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.

339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

340 Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.

341 Exercices de construction en géométrie plane.

342 Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.

343 Exercices de cinématique du point.

345 Exercices sur les triangles.

346 Exemples de résolution de problèmes modélisés par des graphes.

347 Exercices faisant intervenir la trigonométrie.

Exercices d'analyse et probabilités

❁ ❁ ❁

401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

406 Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.

407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.

410 Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.

411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 Exemples de développements en série entière. Applications.

413 Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.

417 Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.

418 Exemples d'utilisation de développements limités.

419 Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.

420 Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.

421 Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.

423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

425 Exemples de calculs d'aires et de volumes.

426 Exemples de calculs d'intégrales multiples.

427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

428 Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires, linéaires ou non linéaires.

429 Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.

430 Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.

431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.

432 Exemples d'approximations d'un nombre réel.

433 Approximations du nombre π .

434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

435 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

436 Exemples de calculs de primitives.

437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.

438 Exemples de problèmes de dénombrement.

439 Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.

440 Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

441 Exemples de systèmes différentiels linéaires $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

442 Exemples d'exercices faisant intervenir le calcul des probabilités.

443 Exemples de résolution approchée d'équations $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = 0$.

Bibliothèque de l'agrégation

6 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs (# 1)	MIT Press
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices (# 2)	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique (# 1)	Vuibert
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie (# 1)	Dunod
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations (# 1)	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe (# 2)	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie (# 5) – Tome 1B - Fonctions numériques (# 6) – Tome 2 - Suites et séries numériques (# 7) – Tome 3 - Analyse fonctionnelle (# 6) – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes (# 4) – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie (# 6) – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie (# 6)	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory (# 1)	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C (# 1) – in Java (# 1) – in ML (# 1)	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG (# 1)	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I (# 2) – Tome II (# 1)	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse (# 9)	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 (# 1)	Dunod

ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre (# 9) – 2. Analyse (# 7) – 3. Compléments d'analyse (# 8) – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie (# 6)	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires (# 2)	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires (# 3)	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique (# 5)	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique (# 1)	Gabay
ARTIN M.	Algebra (# 2)	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 (# 1) – Tome 2 (# 1)	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité (# 1)	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates (# 1)	Masson
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation (# 2)	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle (# 1)	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel (# 3)	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis (# 1)	Addison Wesley
BADOUEL E., BOUCHERON S. **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P.,** **ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale (# 1)	Springer

BAKHVALOV N.	Méthodes numériques (# 2)	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique (# 1)	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) (# 1)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires (# 1)	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre (# 1)	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2)	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology (# 1)	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers (# 3)	MC GRAW HILL
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle (# 3)	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés (# 3)	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie – Index (# 3) – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs (# 3) – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères (# 1) – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes (# 3) – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques (# 2) – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères (# 3)	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2 (# 1)	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics (# 1)	PRENTICE HALL

BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation (# 1)	Springer
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics (# 1)	Oxford Science Publications
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs (# 5)	PUF
BOAS R.	A primer of real functions (# 1)	Mathematical association of America
BON J.L.	Fiabilité des systèmes (# 1)	Masson
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique (# 2)	Springer
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X (# 2) – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII (# 2) – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III (# 2) – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV (# 2)	Hermann
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes (# 3)	Hermann
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités (# 1)	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications (# 4)	Masson
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition (# 1)	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. (# 2)	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics (# 1)	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes (# 4) – 2. Matrices et réduction (# 2)	Ellipses

CABANNES H.	Cours de Mécanique générale (# 2)	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux (# 1)	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes (# 2)	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps (# 1)	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) (# 4)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977) (# 1)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles (# 4)	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques (# 6)	Hermann
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui (# 1)	Cassini
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing (# 1)	Prentice Hall
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) (# 3)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 (# 2) – Analyse 3 (# 3)	Masson
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices (# 1)	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra (# 2)	Springer Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie (# 6)	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie (# 5)	Hermann

CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 (# 1) – Algèbre 2 (# 2)	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation (# 3)	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes (# 1)	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 (# 1)	John Wiley
COLLET P.	Modeling binary data (# 1)	Chapman and Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques (# 1)	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats (# 1) – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles (# 1)	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique (# 1)	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités (# 3)	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 (# 1) – Volume 2 (# 1)	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry (# 1)	John Wiley
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos (# 1)	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe (# 3) – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe (# 2)	Masson

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités (# 2)	MASSON
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation (# 1)	DUNOD
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration (# 1)	DUNOD
DEHEUVELS P.	L'intégrale (# 2)	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale (# 2)	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques (# 3)	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique (# 2 ?)	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité (# 2)	SPRINGER
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments (# 2)	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles (# 2 (1 de 1991 + 1 de 1996))	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations (# 1)	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes (# 2)	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications (# 1)	SPRINGER
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres (# 2)	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI (# 3) – 2ème année MP, PC, PSI (# 3)	DUNOD

DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 (# 2)	Ellipses
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (# 4)	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal (# 3)	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques (# 1)	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne (# 5) – Éléments d'Analyse Tome 2. (# 5)	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année (# 3) – Deuxième année (# 3)	Gauthier-Villars
DUBUC S.	Géométrie plane (# 4)	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques (# 1)	Vuibert
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages (# 1)	Vuibert
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals (# 2)	Academics Press
EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH, KOECHER LAMOTKE, MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT	Les Nombres (# 2)	Vuibert
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions (# 1)	Dunod
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles (# 3)	Ellipses

EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 (# 1) – Algèbre. (# 3)	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles (# 3) – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse (# 3) – Analyse 2 : Éléments de topologie générale (# 3)	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure (# 3)	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X (# 7)	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie (# 1)	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur (# 1)	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 (# 2+1 mal relié) – Volume 2 (# 2)	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence (# 2)	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie (# 3 (1ère) + 7 (2ème)) – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle (# 1 (1ère) + 5 (2ème)) – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples (# 7) – Tome 4 - Séries, équations différentielles (# 1+7)	Vuibert
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales – Algèbre (# 1) – Analyse 1 (# 1) – Analyse 2 (# 1)	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 (# 2)	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 (# 1)	Masson

FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur (# 1)	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique (# 3)	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie (# 3)	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Anneaux (# 1)	Hermann
FRESNEL J.	Groupes (# 1)	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie (# 1)	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra (# 1)	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire (# 3)	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 (# 1) – Tome 2 (# 1)	Dunod
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus (# 2)	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse (# 2)	Springer
GOBLOT R.	Algèbre commutative (# 2)	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie (# 1)	Masson
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2) – Tome 3 (# 1)	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre (# 4)	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations (# 1)	Wiley

GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle (# 2) – Calcul différentiel (# 1)	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre (# 1) – Tome 2 - Topologie et analyse réelle (# 1) – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel (# 1) – Tome 4 - Géométrie affine et métrique (# 1) – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes (# 1)	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre (# 2) – Analyse (# 2)	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire (# 2)	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration (# 1)	Hermann
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) (# 1)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics (# 1)	Wiley
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse (# 7)	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands (# 1)	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités (# 3)	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités (# 3)	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing (# 1)	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers (# 2)	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do (# 1)	Oxford

HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing (# 1)	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications (# 2)	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 (# 1) – Volume 2 (# 1) – Volume 3 (# 2)	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques (# 4)	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle (# 2)	Masson
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation (# 1)	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices (# 1)	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory (# 2)	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) (# 1)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers (# 1)	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I (# 2) – Tome II (# 2)	Freeman and Co
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes (# 4)	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis (# 1)	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces (# 3)	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms (# 1) – Volume 2 : Seminumerical algorithms (# 1) – Volume 3 : Sorting and Searching (# 1)	Addison-Wesley

KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle (# 1)	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres (# 1)	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis (# 2)	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis (# 1)	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 (# 1)	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens (# 1)	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles (# 2)	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles (# 1)	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution (# 1)	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2)	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra (# 1 (1ère) + 5 (7ème))	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra (# 3)	ADDISON-WESLEY
LAVILLE G.	Courbes et surfaces (# 1)	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation (# 2)	ELLIPSES
LAX P. D.	Linear Algebra (# 1)	WILEY
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie (# 3)	PUF

LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques (# 1)	JACQUES GABAY
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation (# 8)	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie (# 8) – Tome 3 : Intégration et sommation (# 5) – Tome 4 : Analyse en dimension finie (# 8) – Tome 5 : Analyse fonctionnelle (# 5)	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 (# 2) – Tome 2 - Algèbre et géométrie (# 6) – Tome 3 - Analyse 1 (# 6) – Tome 4 - Analyse 2 (# 9)	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre (# 4) – Tome 1 pour A-A' : Algèbre (# 4) – Tome 2 : Analyse (# 11) – Tome 3 : Géométrie et cinématique (# 5) – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples (# 4)	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle (# 3)	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie (# 4)	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie (# 1)	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) (# 1)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus (# 1)	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words (# 1)	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales (# 4) – 2 : Les grands théorèmes (# 4)	GAUTHIER-VILLARS

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory (# 1)	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices (# 1)	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes (# 2)	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque (# 2)	Hermann
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 (# 3) – Using Matlab version 6 (# 2-3 ?) – Statistics Toolbox (# 1-3 ?)	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI (# 1)	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés (# 1) – Tome 3 : Exercices et corrigés (# 1) – Tome 4 : Exercices et corrigés (# 1)	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions (# 2)	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation (# 1)	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability (# 1)	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités (# 1)	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique (# 3)	Ellipses
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2 (# 1)	PUF
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices (# 1)	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel (# 2)	PUF

MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages (# 1)	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes (# 3)	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes (# 1)	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques (# 5)	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions (# 2)	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries (# 4)	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI (# 1) – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI (# 2) – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT (# 1) – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT (# 1) – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI (# 3) – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT (# 4) – Exercices d'analyse MPSI (# 1) – Exercices d'analyse MP (# 2) – Exercice d'algèbre et géométrie MP (# 3)	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 (# 3) – Tome 2 (# 3)	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel (# 1)	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés (# 1)	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités (# 1)	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers (# 2)	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains (# 1)	Cambridge

OPREA J.	Differential geometry (# 1)	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	– Probabilités 1 (capes, agrégation) (# 2) – Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) (# 3)	CASSINI
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . . ? Les probabilités de tous les jours (# 1)	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs (# 2)	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course (# 1)	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems (# 1)	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre (# 3)	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre (# 5)	ENSJF
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE (# 3)	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique (# 1)	SPRINGER
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I (# 3) – Volume II (# 3)	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse (# 1)	ELLIPSES
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse (# 1)	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis (# 1)	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre (# 10) – 2- Algèbre et applications à la géométrie (# 11) – 3- Topologie et éléments d'analyse (# 14) – 4- Séries et équations différentielles (# 8) – 5- Applications de l'analyse à la géométrie (# 8)	MASSON

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre (# 1) – Analyse 1 (# 5) – Analyse 2 (# 7)	Masson
RAMIS J.- P., WARUSFEL A. **BUFF X., GARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F., SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence Cours complet avec 270 exercices corrigés – niveau L1 (# 2)	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application (# 1)	Wiley
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques (# 1)	Livre de Poche
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel (# 2)	Hermann
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants (# 2)	Springer
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple (# 1)	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières (# 1)	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques (# 2)	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle (# 2)	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation (# 2)	Vuibert
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 (# 2)	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe (# 3)	Masson
RUDIN W.	Functional analysis (# 3)	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis (# 4)	Mc Graw Hill

SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques (# 2)	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective (# 2)	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres (# 2)	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 (# 1)	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre (# 1)	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux (# 1)	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices (# 1)	Vuibert
SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle (# 5) – II Calcul différentiel et équations différentielles (# 1)	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse (# 6)	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms (# 2)	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java (# 1)	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C (# 1)	Dunod
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes (# 1)	Springer
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique (# 3)	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 (# 1) – Analyse 4 (# 1)	Ellipses

SIDLER J.C.	Géométrie Projective (# 1)	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation (# 1)	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse (# 1)	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I (# 1)	Waddworth and Brooks
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre (# 1)	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie (# 1)	Dunod
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation (# 2)	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 (# 1)	Masson
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 (# 2)	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 (# 1)	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres (# 2)	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers (# 2)	Que sais-je ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne (# 1)	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions (# 4)	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions (# 2)	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires (# 1)	Masson

TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables (# 1)	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires (# 1)	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing (# 1)	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions (# 3) – II Équations fonctionnelles - Applications (# 3)	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités (# 1)	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation (# 2)	Masson
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles (# 1)	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies (# 2)	Classiques Hachette
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER, NICOLAS	Mathématiques – Analyse (# 1) – Arithmétique (# 1) – Géométrie (# 1) – Probabilités (# 1)	Vuibert
WEST D. B.	Introduction to graph theory (# 1)	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis (# 3)	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology (# 1)	Academic Press
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire (# 2)	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages (# 1)	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry (# 1)	Dover

YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics (# 1)	Dover
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie (# 3)	Cassini
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation (# 1)	Masson