BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

100

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Partie I

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

1. (a) Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n\,!} \qquad (\mathcal{E})$$

   (b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

   (c) Résoudre $\mathcal{E}$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

   (d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t et tout entier naturel n à l'aide d'une intégrale.

   (e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}\, e^t}{(n+1)!}$$

   (f) Retrouver, à l'aide de ce qui précède, le développement en série entière en 0 de la fonction exponentielle, en précisant son rayon de convergence. Tous les résultats devront être justifiés.

2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star \,:\, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}\,\frac{1}{n!}$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul q :

$$u_q < e < v_q$$

   (d) On cherche à montrer que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que :

$$e = \frac{p}{q}$$

   En multipliant la double inégalité précédente par $q\,!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationnalité de e.

(e) On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star : w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

i. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|u_n - e| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Montrer qu'il existe un rang n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$:

$$|w_n - e| \leq \varepsilon$$

iii. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

3. On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}, n>1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n > 1 : e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie II

On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que :

$$g(0) = 0 \quad , \quad \forall x \in]0,1] : g(x) = x \ln x$$

1. Etudier la continuité et les variations de la fonction g, puis tracer sa courbe représentative sur $[0,1]$ sur le papier millimétré joint, en prenant pour unité 10 cm sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées.
2. En déduire que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe, et donner sa valeur.
3. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Tournez la page S.V.P.

5. Montrer que, pour tout réel x de $[t_0, e^{-1}]$:

$$\left|g(x) - g(e^{-1})\right| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2\,t_0}$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\left|t_n - e^{-1}\right| \leq 2\,t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2\,t_0}\right)^{2^n}$$

7. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
8. On pose :

$$I = \int_0^1 x^{-x}\,dx$$

   (a) Montrer que I est une intégrale convergente.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x\,dx + \int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx$$

   où on exprimera $\tilde{R}_n$ à l'aide de la fonction R_n introduite en partie I.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\left|\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx\right| \leq \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}$$

   (d) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x\,dx$$

   i. Montrer que $I_{p,q}$ est une intégrale convergente.

   ii. Montrer que, pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$:

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}$$

   iii. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

   (e) Montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Partie III

1. Rappeler le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann.
2. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

3. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\left(\dfrac{4^n\, n^n\, n\,!}{(2\,n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ce problème met en œuvre des techniques usuelles d'analyse, qui montrent que le nombre transcendant e (aussi appelé Nombre d'Euler, ou constante de Neper), qui n'est donc solution d'aucune équation algébrique, peut s'exprimer soit comme limite de suites convergentes, ou bien comme somme d'une série.

IN CHOISY – 14 1100 – D'après documents fournis