Mathématiques 1

PSI

2018

4 heures Calculatrices autorisées

Autour des matrices de Toeplitz

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_p M^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

I Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Q 1. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Q 2. Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B – Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Q 3. Donner le polynôme caractéristique de A.

Q 4. Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q 5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Q 6. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0, ..., 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, ..., 0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

Q 7. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, ..., x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Q 8. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \tag{I.1}$$

Q 9. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

Q 10. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Q 11. En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1, n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

Q 12. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0, n+1]\!]$, $x_k = 2\mathrm{i}\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

Q 13. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1, t_2, ..., t_0, t_1, ..., t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Q 14. Calculer $M_n^2, ..., M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

Q 15. Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

Q 16. On pose $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1\leqslant p,q\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n$.

Q 17. Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

Q 18. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q 19. Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Q 20. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

III Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

Q 21. Montrer que si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i. il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), ..., f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$;

ii. M est semblable à la matrice $C(a_0, ..., a_{n-1})$ définie par

$$C(a_0,...,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $(a_0, ..., a_{n-1})$ sont des nombres complexes.

On dit alors que f_M est un endomorphisme cyclique, que M est une matrice cyclique et que x_0 est un vecteur cyclique de f_M.

III.A.1) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que f_M est diagonalisable. On note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ où $(u_1, ..., u_n)$ sont n nombres complexes.

Q 22. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1, ..., u_n, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ pour que $(u, f_M(u), ..., f_M^{n-1}(u))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Q 23. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

III.A.2) Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On s'intéresse aux éléments propres de la matrice $C(a_0, ..., a_{n-1})$.

Q 24. Soit λ un nombre complexe. En discutant dans $\mathbb{C}^n$ du système $C(a_0, ..., a_{n-1})X = \lambda X$, montrer que λ est une valeur propre de $C(a_0, ..., a_{n-1})$ si et seulement si λ est racine d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à préciser.

Q 25. Si λ est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de $C(a_0, ..., a_{n-1})$ associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

Q 26. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

III.A.3) Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient M une matrice cyclique et x_0 un vecteur cyclique de f_M. On cherche à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid f_M \circ g = g \circ f_M\}$$

est l'ensemble des polynômes en f_M.

Q 27. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

Q 28. Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$.
On pourra utiliser la base $(x_0, f_M(x_0), ..., f_M^{n-1}(x_0))$ et exprimer $g(x_0)$ dans cette base.

Q 29. Conclure.

III.A.4) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 30. Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable ?

Q 31. La matrice N est-elle cyclique ?

Q 32. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

III.B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite du problème, les matrices considérées sont à coefficients réels.

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice d'ordre n et k est un entier dans $[\![-n+1, n-1]\!]$, on dit que le coefficient a_{ij} de A est un coefficient diagonal d'ordre k si $j - i = k$.

On note $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice définie par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j-i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Tous les coefficients de cette matrice sont nuls sauf ses coefficients diagonaux d'ordre k qui sont égaux aux coefficients diagonaux d'ordre k de A.

Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On note D_k la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux d'ordre k qui valent 1. Pour tout entier relatif k, on définit l'espace vectoriel Δ_k par

$$\Delta_k = \{M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{ij} = 0 \text{ si } j - i \neq k\} \qquad \text{si } k \in [\![-n+1, n-1]\!]$$

et $\Delta_k = \{0\}$ sinon. Ainsi, Δ_0 est l'ensemble des matrices diagonales, Δ_1 l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre 1, Δ_{-1} l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre -1.

Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, on note H_k l'espace vectoriel $\displaystyle\bigoplus_{i=k}^{n-1} \Delta_i$.

Q 33. Montrer que si i et j sont dans $[\![-n+1, n-1]\!]$, si $A \in \Delta_i$ et $B \in \Delta_j$, alors $AB \in \Delta_{i+j}$.

Q 34. En déduire que si $A \in H_i$ et $B \in H_j$, alors $AB \in H_{i+j}$

III.B.1)

Q 35. Soit C une matrice nilpotente. Montrer que $I_n + C$ est inversible et que

$$(I_n + C)^{-1} = I_n - C + C^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C^{n-1}$$

On suppose que $k \geqslant 0$ et que C est une matrice de Δ_{k+1}. On pose $P = I_n + C$.

Q 36. Monter que P est inversible et que $P^{-1} \in \displaystyle\bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}$.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : M \mapsto P^{-1}MP$.

Q 37. Soient $i \in [\![0, k]\!]$ et $M \in \Delta_i$. Montrer qu'il existe M' dans H_{k+1} tel que $\varphi(M) = M + M'$.

Q 38. La matrice N étant la matrice définie en III.A.4, montrer qu'il existe N' dans H_{k+1} tel que

$$\varphi(N) = N + NC - CN + N'$$

Q 39. Soit T une matrice triangulaire supérieure. On pose $A = N + T$, $B = \varphi(A)$. Montrer que $B \in H_{-1}$ et que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![-1, k-1]\!], \quad B^{(i)} = A^{(i)} \\ B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN \end{cases}$$

III.C – L'opérateur de Sylvester

On définit les opérateurs

$$\mathcal{S} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto NX - XN \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}^* : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto {}^t\!NX - X{}^t\!N \end{array} \right.$$

Q 40. Montrer que le noyau de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.

On admet que le noyau de $\mathcal{S}^*$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures.

Q 41. Montrer que $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$ et $\mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel défini par : $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M_1, M_2 \rangle = \operatorname{tr}({}^t M_1 M_2)$.

On note $\mathcal{S}_{k+1}$ la restriction de $\mathcal{S}$ à Δ_{k+1} et $\mathcal{S}_k^*$ la restriction de $\mathcal{S}^*$ à Δ_k.

Q 42. Vérifier que pour tous X dans Δ_{k+1} et Y dans Δ_k, $\langle \mathcal{S}_{k+1} X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{S}_k^* Y \rangle$. En déduire que $\ker(\mathcal{S}_k^*)$ et $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ sont supplémentaires orthogonaux dans Δ_k, c'est-à-dire que

$$\Delta_k = \ker(\mathcal{S}_k^*) \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$$

Q 43. Soient T une matrice triangulaire supérieure, $A = N + T$ et $k \geqslant 0$. Montrer que A est semblable à une matrice L dont tous les coefficients diagonaux d'ordre k sont égaux et vérifiant $\forall i \in [\![-1, k-1]\!]$, $L^{(i)} = A^{(i)}$.

Q 44. En déduire que toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.

• • • FIN • • •

